Μαθηματικά

Στ΄ Δημοτικού

1η Θεματική ενότητα

Αριθμοί και πράξεις

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
1. Καλημέρα, φίλε μου Αριθμέ	Φυσικοί αριθμοί	9
2. Αριθμοί με... συνοδεία	Δεκαδικοί αριθμοί	11
3. Οι αριθμοί αλλάζουν εμφάνιση	Μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα	13
4. Οι αριθμοί αναμετριούνται	Σύγκριση φυσικών ή δεκαδικών αριθμών	15
5. Προσθέσεις και αφαιρέσεις	Πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών	17
6. Οι αριθμοί αναπαράγονται	Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών αριθμών	19
7. Δίκαιη μοιρασιά!	Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών	21
8. Μαθαίνω τη γλώσσα των αριθμών	Πράξεις με μεικτές αριθμητικές παραστάσεις	23
9. Μιλώ τη γλώσσα των αριθμών	Λύνω σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων	25
10. Ένα μηχάνημα που μιλάει μαθηματικά μαζί μου	Η χρήση του υπολογιστή τσέπης	27
11. Πρόχειροι λογαριασμοί	Στρογγυλοποίηση φυσικών και δεκαδικών αριθμών	29
12. Μπαίνεις μόνο αν χωράς ακριβώς	Διαιρέτες ενός αριθμού – Μ.Κ.Δ. αριθμών	31
13. Μάντεψε το μυστικό κανόνα μου	Κριτήρια διαιρετότητας	33
14. Είμαστε και οι πρώτοι!	Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί	35
15. Δέντρα με αριθμούς	Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών	37
16. Έχουμε πολλά κοινά μεταξύ μας	Πολλαπλάσια ενός αριθμού – Ε.Κ.Π.	39
17. Πολλοί μαζί είμαστε πιο δυνατοί	Δυνάμεις	41
18. Συσκευασία: «Δέκα σε ένα»	Δυνάμεις του 10	43
19. Τι πλάσμα είναι αυτό το... κλάσμα;	Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα	45
20. Ποιος θα με βοηθήσει στο μοίρασμα;	Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης	47
21. Μπορώ να λέω το ίδιο και μ' άλλα λόγια!	Ισοδύναμα κλάσματα	49
22. Πώς θα μπούμε στη σειρά;	Σύγκριση-διάταξη κλασμάτων	51
23. Η σωστή ενέργεια!	Προβλήματα με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων	53
24. Ό,τι κι αν κάνεις εγώ θα πολλαπλασιάζομαι!	Προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων	55
Δίνω ... λογαριασμό	*Ανακεφαλαίωση για τη θεματική ενότητα 1: Αριθμοί και Πράξεις*	57

Αριθμοί και πράξεις

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τους αριθμούς και τις πράξεις με αριθμούς.

Θα ξεκινήσουμε από τα αριθμητικά σύμβολα τα οποία χρησιμοποιούμε από την Α΄Δημοτικού για να φτιάξουμε τους αριθμούς και να κάνουμε υπολογισμούς.

Ξέρετε πως οι Ινδοί τα χρησιμοποιούσαν από το 350 π.Χ.;

Γνωρίζετε ακόμα ότι τα δίδαξαν αργότερα οι Άραβες στους Ευρωπαίους και για το λόγο αυτό ονομάστηκαν «αραβικοί αριθμοί»;

Τα σύμβολα που γνωρίζουμε δεν τελειοποιήθηκαν σε κάποιον ορισμένο χρόνο ή τόπο αλλά εξελίχτηκαν με συνεχή ανάπτυξη και πιθανότατα τελειοποιήθηκαν τους τελευταίους αιώνες.

Στο σκίτσο που ακολουθεί βλέπετε την εξέλιξη των συμβόλων από το 800 μετά Χριστόν έως σήμερα.

Κεφάλαιο 1ο

Φυσικοί αριθμοί

Καλημέρα, φίλε μου Αριθμέ

Διαβάζω και γράφω φυσικούς αριθμούς.
Κατανοώ την αρχή της διαδοχής στην ακολουθία των φυσικών αριθμών.
Μαθαίνω την αξία των ψηφίων ενός φυσικού αριθμού.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 64ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού προγράμματος SOCRATES/COMENIUS, αναζήτησαν στοιχεία για τους ανήλικους εργαζόμενους στην Ελλάδα.

Στο διπλανό πίνακα περιλαμβάνονται τα στοιχεία που συγκέντρωσαν.

- Ταξινομήστε τους αριθμούς του πίνακα σε ομάδες, ανάλογα με το πλήθος των ψηφίων τους.

  (2ψηφία) ....

  (3ψηφία) ....

  (4ψηφία) ....

  ....

  (5ψηφία) ....

  ....

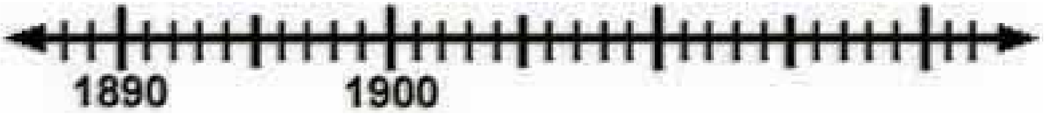
- Σε ποιον από τους αριθμούς το ψηφίο 2 έχει τη μεγαλύτερη αξία;
- Πόσα παιδιά μικρότερα από 15 ετών εργάζονταν στην Ελλάδα το 1996;
- Πόσοι έφηβοι 15-18 ετών εργάζονταν σε βιομηχανίες;
- Σε ποιον κλάδο εργάζονταν οι περισσότεροι ανήλικοι;
- Συζητήστε στην τάξη για τη σημασία των αριθμών στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Ανήλικοι εργαζόμενοι ανά τομέα απασχόλησης στην Ελλάδα

Τομέας Απασχόλησης	**Ηλικία**	
	10-14	**15-18**
Γεωργία, κτηνοτροφία	3.053	22.798
Αλιεία	30	679
Ορυχεία- λατομεία		32
Βιομηχανία	556	16.470
ΔΕΗ, Ύδρευση, Φ. Αέριο		58
Κατασκευές	273	8.857
Εμπόριο	664	16.373
Ξενοδοχεία, εστιατόρια	199	8.074
Μεταφορές		1.766
Τράπεζες		448
Άλλες δραστηριότητες	41	3.654
Παροχή υπηρεσιών		4.384
Οικιακό προσωπικό		397
ΣΥΝΟΛΟ	**4.816**	**83.989**

Πηγή: ΕΣΥΕ, Έρευνα Εργατικού Δυναμικού, 1996

Δραστηριότητα 2η



Να τοποθετήσετε στην ιστορική γραμμή τα ακόλουθα ιστορικά γεγονότα.

Α. Οι πρώτοι σύγχρονοι Ολυμπιακοί Αγώνες 1896

Β. Δεκαέξι χρόνια μετά τους Ολυμπιακούς Αγώνες γίνεται ο Α΄ Βαλκανικός πόλεμος.

Γ. Δύο χρόνια μετά αρχίζει ο Α΄ Παγκόσμιος πόλεμος, που διαρκεί 4 χρόνια (Σημειώστε την αρχή και το τέλος του.)

Δ. Η λήξη του πολέμου βρίσκει τον Οδυσσέα Ελύτη στην Αθήνα σε ηλικία 7 ετών. (Σημειώστε τη χρονολογία της γέννησής του.)

Πολλές φορές στη ζωή μας χρησιμοποιούμε αριθμούς για να εκφράσουμε ένα πλήθος ή μια σειρά. Λέμε, για παράδειγμα, ότι από τους 23 μαθητές της τάξης στη γραμμή ο Γιάννης είναι 1ος. Οι αριθμοί 23 και 1 ονομάζονται «φυσικοί αριθμοί».

Φυσικοί αριθμοί

Οι αριθμοί: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99, ..., 1000, ... λέγονται **φυσικοί αριθμοί.**

Κάθε φυσικός αριθμός, εκτός από το 0, σχηματίζεται από τον προηγούμενό του, με την πρόσθεση του αριθμού 1.

Για τη γραφή όλων των φυσικών αριθμών υπάρχουν δέκα ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Το ίδιο ψηφίο, ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό, δηλώνει μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κ.λπ.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 6 έχει επόμενο τον αριθμό 7, ο αριθμός 99 τον αριθμό 100, ο αριθμός 1000 τον αριθμό 1001 κ.ο.κ.

Ο αριθμός 434 σχηματίζεται με τα ψηφία 4 και 3. Για το σχηματισμό του αριθμού 11, χρησιμοποιήσαμε μόνο το ψηφίο 1.

Εφαρμογή 1η

Να γραφεί με ψηφία ο αριθμός **επτά εκατομμύρια δεκαπέντε χιλιάδες εννιακόσια δύο.**

Λύση

Κάθε ψηφίο διαβάζεται ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό. Το ψηφίο μηδέν (0) δεν διαβάζεται, αλλά γράφεται για να κρατά τα άλλα ψηφία στη σωστή τους θέση και δηλώνει ότι λείπουν οι μονάδες της θέσης που κατέχει.

Στους αριθμούς που έχουν περισσότερα από τρία ψηφία, για λόγους ευκολίας στην ανάγνωση, χωρίζουμε με μία τελεία κάθε τριάδα ψηφίων, αρχίζοντας από τις μονάδες (δεξιά).

Μονάδες εκατομμυρίων	Εκατοντάδες χιλιάδων	Δεκάδες χιλιάδων	Μονάδες χιλιάδων	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
7.	0	1	5.	9	0	2

Έτσι, θα γράψουμε τον αριθμό 7015902 χρησιμοποιώντας τις τελείες διαχωρισμού: ....

Εφαρμογή 2η

Τι φανερώνει το ψηφίο 2 στους παρακάτω αριθμούς;

α. 102 **β.** 1.020 **γ.** 12.618 **δ.** 548.281 **ε.** 32.405.186

Λύση

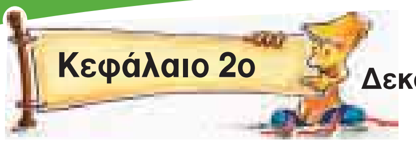
α. μονάδες, β. δεκάδες, γ. μονάδες χιλιάδων, δ. εκατοντάδες, ε. μονάδες εκατομμυρίων

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **φυσικός αριθμός.** Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Το μηδέν ως ψηφίο δηλώνει ότι δεν υπάρχουν μονάδες μιας τάξης.	❐	❐
Ανάμεσα στο 10 και το 40 το ψηφίο 3 εμφανίζεται 5 φορές.	❐	❐
Οι μονοψήφιοι φυσικοί αριθμοί είναι 9.	❐	❐



Αριθμοί με... συνοδεία

Διαβάζω και γράφω δεκαδικούς αριθμούς.
Μαθαίνω την αξία των ψηφίων ενός δεκαδικού αριθμού.
Κατανοώ τις ιδιότητες των δεκαδικών αριθμών.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 25ου Δημοτικού Σχολείου Τρικάλων θέλησαν να καταγράψουν το ύψος τους. Μετρήθηκαν λοιπόν και κατέγραψαν στον παρακάτω πίνακα τον αριθμό των παιδιών που αντιστοιχούν σε κάθε ύψος.

ΥΨΟΣ ΣΕ ΜΕΤΡΑ	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61
ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ	1	1	1	1	0	2	2	4	3	3	2	2	0	1
ΥΨΟΣ ΣΕ ΕΚΑΤΟΣΤΑ														

- Τι αριθμούς χρησιμοποίησαν για να καταγράψουν τις μετρήσεις τους;
- Επαρκούν οι φυσικοί αριθμοί για να εκφράσουμε μετρήσεις;
- Μπορείς να συμπληρώσεις την τελευταία σειρά του πίνακα;
- Τι αριθμούς χρησιμοποίησες; Γιατί;

....

....

Δραστηριότητα 2η

Πριν από τους αγώνες άρσης βαρών οι αθλητές της ίδιας κατηγορίας ζυγίζονται με ακρίβεια γραμμαρίου, ώστε σε περίπτωση ισοπαλίας να κερδίζει ο ελαφρύτερος.

Στο διπλανό σχήμα καταγράφεται το αποτέλεσμα της ζύγισης του αθλητή Πύρρου Δήμα στους Ολυμπιακούς Αγώνες του 2000· η υποδιαστολή χωρίζει το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος. Συμπλήρωσε στο σχήμα τι δηλώνουν οι αριθμοί 0, 6 και 5 στο δεκαδικό μέρος.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες				
	8	4	,	0	6	5

- Προσπαθήστε τώρα να εκφράσετε το αποτέλεσμα της ζύγισης με λόγια.

....

....

....

Μέσα από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώσαμε ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν αρκούν για να εκφράσουμε κάποιες μετρήσεις με ακρίβεια. Έτσι, χρησιμοποιούμε ένα άλλο είδος αριθμών που ονομάζονται «δεκαδικοί αριθμοί».

Δεκαδικοί Αριθμοί

Δεκαδικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που αποτελούνται από ένα ακέραιο και ένα δεκαδικό μέρος. Τα δύο μέρη χωρίζονται μεταξύ τους με την υποδιαστολή (,).
Όπως οι φυσικοί, έτσι και οι δεκαδικοί αριθμοί, σχηματίζονται από μονάδες διάφορων τάξεων στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.

Τόσο στο ακέραιο όσο και στο δεκαδικό μέρος κάθε τάξη είναι 10 φορές μεγαλύτερη από την αμέσως επόμενη προς τα δεξιά της.
Η αξία ενός δεκαδικού αριθμού δεν αλλάζει, αν προσθέσουμε ή διαγράψουμε μηδενικά στο τέλος του.

Παραδείγματα

1,72
27,39
384,206

Στους παραπάνω δεκαδικούς αριθμούς το ψηφίο 2 έχει διαφορετική αξία, ανάλογα με τη θέση που έχει στον αριθμό.

1 δέκατο = 10 εκατοστά
1 εκατοστό = 10 χιλιοστά
(δείξτε το στο χάρακά σας)
0,1 = 0,10
0,01 = 0,010

Εφαρμογή 1η

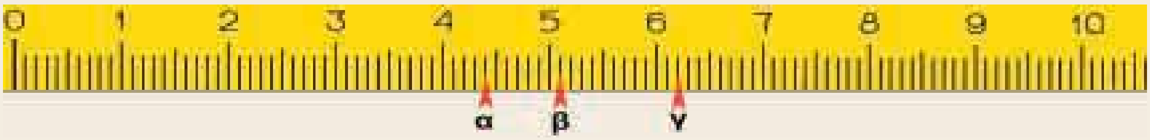
Να γραφεί με ψηφία ο αριθμός **εκατόν δύο και σαράντα πέντε χιλιοστά.**
Ονομάστε κάθε ψηφίο, ανάλογα με την αξία θέσης του στον αριθμό.

Λύση
Το δεκαδικό μέρος διαβάζεται με το όνομα της αξίας του τελευταίου ψηφίου. Έτσι σε αυτόν τον αριθμό, αφού γράψουμε το ακέραιο μέρος του (102), συνεχίζουμε στο δεκαδικό, γνωρίζοντας ότι το ψηφίο 5 πρέπει να μπει στην τρίτη θέση μετά την υποδιαστολή.
Γράφουμε: **102,045.**

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες		Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
1	0	2	,	0	4	5

Εφαρμογή 2η

Μετρήσαμε το μήκος τριών τύπων μπαταριών και βρήκαμε τα εξής αποτελέσματα:
α) τύπος **D:** 6,2 εκατοστά, β) τύπος **AAA:** 4,4 εκατοστά, γ)τύπος **AA:** 5,1 εκατοστά.
Σημειώστε στην αριθμογραμμή τα σημεία α, β και γ που αντιστοιχούν στις μετρήσεις.
Λύση

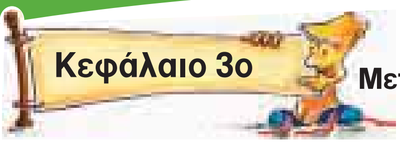


Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **δεκαδικός αριθμός.** Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Μετά την υποδιαστολή γράφεται το ακέραιο μέρος.	❐	❐
Τα εκατοστά γράφονται στη δεύτερη θέση μετά την υποδιαστολή.	❐	❐
Το 1 δέκατο της ακέραιης μονάδας είναι ίσο με 10 χιλιοστά της ίδιας ακέραιης μονάδας.	❐	❐



Οι αριθμοί αλλάζουν εμφάνιση

Κατανοώ την ανάγκη μετατροπής των αριθμών από τη μία μορφή στην άλλη.
Μετατρέπω τους δεκαδικούς αριθμούς σε κλάσματα.
Μετατρέπω τα δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 2ου Δημοτικού Σχολείου Νιγρίτας επισκέφθηκαν τον αρχαιολογικό χώρο στο Δίον. Κατά την επιστροφή θέλησαν να καταγράψουν την απόσταση από το σχολείο τους. Ζήτησαν λοιπόν από τον οδηγό να «μηδενίσει» το μετρητή του λεωφορείου. Το λεωφορείο κατά την επιστροφή άφησε τους μαθητές στην πλατεία του χωριού που απέχει $\frac{3}{10}$ του χιλιομέτρου από το σχολείο τους.

Η ένδειξη του μετρητή φαίνεται στη διπλανή εικόνα.

Ο δάσκαλος εξήγησε στα παιδιά ότι η απόσταση δεν ήταν 2.535 αλλά 253,5 χιλιόμετρα, επειδή το κόκκινο ψηφίο δεν μετρά χιλιόμετρα αλλά δέκατα του χιλιομέτρου.

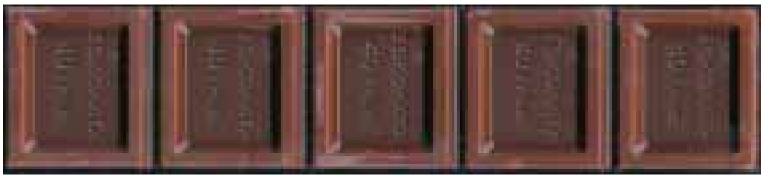
- Αφού τα αριθμητικά δεδομένα είναι διαφορετικής μορφής, τι πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να υπολογίσουν πόσο απέχει το Δίον από το σχολείο τους;

....

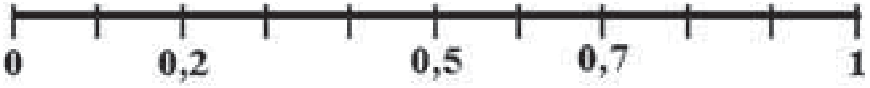
....

Δραστηριότητα 2η

Για να φτιάξουν ένα γλυκό στο ολοήμερο τμήμα, τα παιδιά ζύγισαν 0,2 κιλά σοκολάτας. Κατόπιν έβαλαν να λιώσει σε ένα δοχείο / δοσομετρητή του 1 κιλού. Χρωματίστε το διπλανό σχήμα μέχρι την ένδειξη έως την οποία ανέβηκε η στάθμη της λιωμένης σοκολάτας.



- Τοποθετήσετε τα κλάσματα των ενδείξεων του δοσομετρητή στην παρακάτω αριθμογραμμή.



- Διατυπώστε έναν κανόνα για τη μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα.

....

....

Κάνοντας τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές χρειάζεται να γράψουμε τα δεκαδικά κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς και αντίστροφα.

Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα και αντίστροφα	**Παραδείγματα**
Οι **δεκαδικοί αριθμοί** είναι δυνατό να γραφούν ως δεκαδικά κλάσματα και τα **δεκαδικά κλάσματα** ως δεκαδικοί αριθμοί.	Ο αριθμός 0,5 μπορεί να γραφεί ως $\frac{5}{10}$. Ο αριθμός $\frac{8}{10}$ μπορεί να γραφεί ως 0,8.
Για να γράψουμε έναν δεκαδικό αριθμό ως κλάσμα, γράφουμε όλο τον αριθμό, χωρίς την υποδιαστολή, στη θέση του **αριθμητή** και στη θέση του **παρονομαστή** γράφουμε τον αριθμό 1 με τόσα μηδενικά όσα ήταν τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.	Ο αριθμός 1,5 γίνεται: 15 αριθμητής, με παρονομαστή το 10, δηλαδή $\frac{15}{10}$ ή 1 $\frac{5}{10}$.
Για να γράψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό, γράφουμε μόνο τον **αριθμητή** του και χωρίζουμε με υποδιαστολή τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα μηδενικά είχε ο **παρονομαστής.**	Ο αριθμός $\frac{8}{10}$ γράφεται ως 0,8.

Εφαρμογή 1η

Πώς θα γραφεί ως κλάσμα ο δεκαδικός αριθμός **δύο και σαράντα πέντε εκατοστά;**

Λύση

Ο αριθμός 2,45 γράφεται στη θέση του αριθμητή, χωρίς την υποδιαστολή, ενώ στη θέση του παρονομαστή γράφεται η μονάδα (1) με δύο μηδενικά (00), δηλαδή το 100.
Έτσι έχουμε: 2,45 = $\frac{\quad}{\quad}$.

Εφαρμογή 2η

Αν αφαιρέσουμε από τον δεκαδικό αριθμό 55,70 τον αριθμό, $\frac{25}{100}$ ποιος αριθμός θα προκύψει;

Λύση

Ο αριθμός $\frac{25}{100}$ γράφεται ως δεκαδικός: 0,25.

Αφαιρούμε τώρα από το 55,70 το 0,25
55,70 - 0,25 = ...

Απάντηση: Θα προκύψει ο αριθμός ....

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη διαδικασία της **μετατροπής δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα και αντίστροφα.** Εξήγησε με παραδείγματα τη διαδικασία αυτή.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Κάτι που κοστίζει 30 λεπτά, κοστίζει $\frac{30}{100}$ του €.	❒	❒
Για να μετατρέψουμε έναν δεκαδικό αριθμό σε κλάσμα, αρκεί να βάλουμε το 10 στη θέση του παρονομαστή.	❒	❒

Κεφάλαιο 4ο

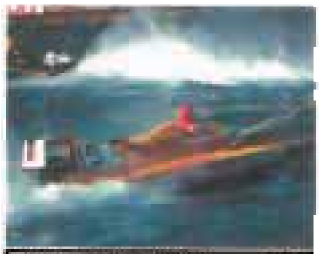
Σύγκριση φυσικών ή δεκαδικών αριθμών

Οι αριθμοί αναμετριούνται

Συγκρίνω φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Χρησιμοποιώ τα σύμβολα > και <.
Διατάσσω τους φυσικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.
Παριστάνω τους αριθμούς με σημεία πάνω σε μια ευθεία.

Δραστηριότητα 1η *«Υπερατού»*

Γ1 Formel 1-OZ Europe



Ταχύτης (Χλμ./Ώρα)	260
Ισχύς (Ίπποι/KW)	440/323
Στροφές ανά λεπτό	12000
Κύλινδροι	6
Κυβισμός σε κ.εκ.	2500
Βάρος (Κιλά)	350

Το παιχνίδι «Υπερατού» παίζεται με κάρτες που έχουν φωτογραφίες και πίνακες με τα χαρακτηριστικά αυτοκινήτων, σκαφών, αεροπλάνων κ.λπ.
Οι δύο παίκτες ανακατεύουν τις κάρτες και παίρνουν από μισές. Ο πρώτος παίκτης διαλέγει από την 1η κάρτα του εκείνο το χαρακτηριστικό που πιστεύει ότι υπερτερεί από το αντίστοιχο στην κάρτα του αντιπάλου. Λέει το χαρακτηριστικό με την τιμή στον αντίπαλο και, αν υπερισχύει, τότε ο αντίπαλος του δίνει την κάρτα του. Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρι να τελειώσουν όλες οι κάρτες κάποιου παίκτη.

Θ1 Offshore Racer International

Ταχύτης (Χλμ./Ώρα)	170
Ισχύς (Ίπποι/KW)	1400/1029
Στροφές ανά λεπτό	6100
Κύλινδροι	16
Κυβισμός σε κ.εκ.	13600
Βάρος (Κιλά)	4000

- Τι θα διάλεγες να πεις αν είχες την κάρτα Γ1, χωρίς να γνωρίζεις τι έχει ο αντίπαλος;
- Ανάμεσα στα δύο σκάφη αυτό με τη μεγαλύτερη ισχύ είναι και το πιο γρήγορο;
- Με τη σύγκριση μπορούμε να βρούμε ποιο σκάφος είναι το πιο γρήγορο, το πιο δυνατό και το πιο βαρύ. Μπορούμε όμως να βρούμε ποιο υπερτερεί σε όλα;

Δραστηριότητα 2η *«Οι αποστάσεις στις Κυκλάδες»*

ΟΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ (ΣΕ ΜΙΛΙΑ) ΤΩΝ ΓΥΡΩ ΝΗΣΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΛΙΜΑΝΙ ΤΗΣ ΣΥΡΟΥ								
Πάρος	Νάξος	Κύθνος	Τήνος	Μύκονος	Σίφνος	Σέριφος	Κέα	Άνδρος
25,2	30,3	40,5	12,2	19,1	41,3	37,5	33,8	51,2

Ενώ στο χάρτη η Σύρος φαίνεται να βρίσκεται στο κέντρο των νησιών, οι αποστάσεις ανάμεσα στα λιμάνια διαφέρουν, όπως φαίνεται και στον πίνακα.

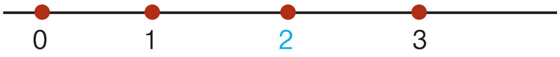
- Ποιο είναι το πιο μακρινό και ποιο το πιο κοντινό νησί, σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα; ....
- Η Σέριφος ή η Κύθνος φαίνεται να είναι πιο κοντά στη Σύρο στο χάρτη;
- Αφού εξετάσετε τα στοιχεία του πίνακα, απαντήστε στο ίδιο ερώτημα.
- Διατάξτε τα λιμάνια από το κοντινότερο προς το πιο μακρινό:

....

....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να διαπιστώσουμε ότι πολλές φορές χρειάζεται να συγκρίνουμε φυσικούς ή δεκαδικούς αριθμούς μεταξύ τους.

Σύγκριση και διάταξη αριθμών	**Παραδείγματα**
Δύο αριθμοί (φυσικοί ή δεκαδικοί) μπορούν πάντα να **συγκριθούν** μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης εκφράζεται με τα σύμβολα <, >, =.	801 < 811 1,13 < 1,15
Μπορούμε να **διατάξουμε** τους αριθμούς, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της σύγκρισής τους, από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο (αύξουσα σειρά) ή από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο (φθίνουσα σειρά).	2,05 < 3,1 < 3,5 23 > 15 > 9 ~~9 < 23 > 15~~
Η σύγκριση και η διάταξη των αριθμών μας επιτρέπει να παρεμβάλουμε έναν ή περισσότερους αριθμούς ανάμεσα σε δύο άλλους.	1 < .... < 3



Εφαρμογή 1η

Ένα έτοιμο τοστ στοιχίζει 1,10 €. Για να το φτιάξουμε μόνοι μας, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα εξής υλικά: ψωμί που κοστίζει 0,20 €, σαλάμι που κοστίζει 0,23 € και κασέρι που κοστίζει 0,18 €. Σε ποια περίπτωση μας στοιχίζει το τοστ περισσότερο;

Λύση

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα ποσά που πληρώνουμε στις δύο περιπτώσεις, πρέπει να βρούμε πόσο πληρώνουμε για όλα τα υλικά όταν το φτιάχνουμε μόνοι μας.

Έτσι έχουμε: 0,20 + 0,23 + 0,18 = ...

Επομένως, πληρώνουμε περισσότερο όταν το αγοράζουμε έτοιμο, αφού 1,10 > ....

Εφαρμογή 2η

Αν τα σημεία Α και Β πάνω στην αριθμογραμμή αντιστοιχούν στους αριθμούς 2 και 6, σε ποιον αριθμό αντιστοιχεί το μέσο του τμήματος ΑΒ;

Λύση

Η απόσταση μεταξύ των σημείων **Α** και **Β** είναι 4 μονάδες. Το μέσο τους απέχει 2 μονάδες από το καθένα. Το ζητούμενο σημείο απέχει από το **Α** δύο (2) μονάδες, προσθέτουμε και τις 2 μονάδες που απέχει το σημείο **Α** από το μηδέν και βρίσκουμε: 2 + 2 = 4.

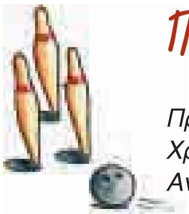
Άρα το μέσο του τμήματος ΑΒ αντιστοιχεί στον αριθμό .... της αριθμογραμμής.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **σύγκριση, μεγαλύτερος, μικρότερος, διάταξη αριθμών και αριθμογραμμή**. Εξήγησε με παραδείγματα τους όρους αυτούς.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Ο αριθμός 2.006 παρεμβάλλεται ανάμεσα στους αριθμούς 2.005 και 2.007	❐	❐
5,014 < 5,041	❐	❐
11.100 > 11.001 > 10.101 > 10.110	❐	❐

Κεφάλαιο 5ο **Πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών**



Προσθέσεις και αφαιρέσεις

Προσθέτω και αφαιρώ φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Χρησιμοποιώ τις ιδιότητες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.
Αναγνωρίζω ότι η αφαίρεση είναι αντίθετη πράξη της πρόσθεσης.

Δραστηριότητα 1η

Σε ένα παιχνίδι ντόμινο βρίσκεται στα χέρια σου η διπλανή κάρτα.

- Ποιο είναι το άθροισμα των σημείων της; ....
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να οδηγηθούμε στο άθροισμα;
- Τι παρατηρείς; ....

Τι παρατηρείς στη δεύτερη κάρτα για το άθροισμα με το 0;

....

....

Αν έχεις να προσθέσεις τις δύο αυτές κάρτες μαζί, να περιγράψεις τους τρόπους με τους οποίους μπορείς να το κάνεις:

....

....

....

Δραστηριότητα 2η

Μια πράξη ή μια ενέργεια που εξουδετερώνει μια άλλη λέγεται αντίστροφή της (π.χ. ανεβαίνω τη σκάλα – κατεβαίνω τη σκάλα).

- Βρείτε άλλες αντίστροφες πράξεις ή ενέργειες.

....

....

Αν από τον αριθμό 26 αφαιρέσουμε τον αριθμό 8 βρίσκουμε 18. Πώς από τον αριθμό 18 μπορούμε να ξαναβρούμε το 26;
Σημειώστε με ισότητες αυτές τις πράξεις.

....

....

....

- Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε για τις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση;

....

....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στα εξής συμπεράσματα:

Πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών	**Παραδείγματα**
Αν αλλάξουμε τη σειρά των προσθετέων, δεν αλλάζει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης **(αντιμεταθετική ιδιότητα).**	**προσθετέοι άθροισμα** 49 + 16 = 65 3,2 + 11,5 = 14,7 16 + 49 = 65 11,5 + 3,2 = 14,7
Σε μια πρόσθεση πολλών αριθμών, προσθέτουμε πρώτα τους δύο και μετά στο άθροισμά τους τον τρίτο κ.ο.κ. Αν αλλάξουμε τα ζευγάρια των προσθετέων, το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δεν αλλάζει **(προσεταιριστική ιδιότητα).**	49 + 16 + 14 = (49 + 16) + 14 = 65 + 14 = 79 49 + 16 + 14 = 49 + (16 + 14) = 49 + 30 = 79
Η αφαίρεση είναι πράξη αντίστροφη της πρόσθεσης. Σε κάθε αφαίρεση, αν προσθέσουμε τη διαφορά και τον αφαιρετέο, βρίσκουμε τον μειωτέο.	**μειωτέος – αφαιρετέος = διαφορά** 693 - 541 = 152 92,5 - 48,2 = 44,3 152 + 541 = 693 44,3 + 48,2 = 92,5

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης μας βοηθούν να υπολογίζουμε πιο γρήγορα αθροίσματα με πολλούς αριθμούς. Η πρόσθεση και η αφαίρεση στους δεκαδικούς αριθμούς γίνονται όπως και στους φυσικούς. Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ψηφία σύμφωνα με την αξία τους.

Εφαρμογή 1η

Η Φωτεινή μάζεψε 18,85 €. Πόσα χρήματα πρέπει να προσθέσει ακόμα στις οικονομίες της, ώστε να συγκεντρώσει 35,60 € και να αγοράσει μια συσκευή DVD για τον υπολογιστή της;

Λύση - Απάντηση

Τα χρήματα που χρειάζεται να συγκεντρώσει θα είναι τόσα ώστε αν προστεθούν στο αρχικό ποσό, το άθροισμα να είναι ίσο με 35,60 €.
Δηλαδή 18,85 + άγνωστο ποσό = 35,60 €.
Ξέροντας ότι η αφαίρεση είναι πράξη αντίστροφη της πρόσθεσης, λύνω το πρόβλημα κάνοντας την πράξη: **35,60 - 18,85 = ...** €

Εφαρμογή 2η

Υπολογίστε με το νου το άθροισμα 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1= ....

Λύση

Παρατήρησε δύο διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους υπολογίζεται το άθροισμα:

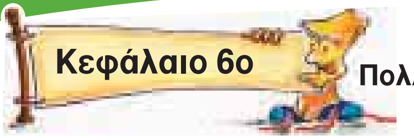
Επιλέγω ένα ζευγάρι προσθετέων και βρίσκω το άθροισμά τους. Μετά επιλέγω έναν από τους υπόλοιπους προσθετέους για να τον κάνω ζευγάρι με το προηγούμενο άθροισμα και συνεχίζω έτσι μέχρι να τελειώσουν όλοι οι προσθετέοι. ...

Αλλάζω τη σειρά των προσθετέων ώστε να γίνουν ζευγάρια που έχουν άθροισμα το 10. Μετά προσθέτω όσους δεν έχουν ζευγάρι. Π.χ. (9+1) + (8+2) + (7+3) + (6+4) + 5 = ...

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **αντιμεταθετική ιδιότητα, προσεταιριστική ιδιότητα** και **αντίστροφες πράξεις**. Εξήγησε με παραδείγματα τους όρους αυτούς.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Η ισότητα: 74 + 62 + 26 = 100 + 62 είναι σωστή.	❒	❒
Μπορούμε να κάνουμε αφαίρεση ως δοκιμή της πρόσθεσης.	❒	❒
Στην αφαίρεση ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.	❒	❒



Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Οι αριθμοί αναπαράγονται

Πολλαπλασιάζω φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Χρησιμοποιώ τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού.
Διαπιστώνω την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.
Πολλαπλασιάζω με το 10, το 100, το 1000 … και με το 0,1, το 0,01, το 0,001 ...

Δραστηριότητα 1η

Ο Πυθαγόρας, ο μεγάλος Έλληνας φιλόσοφος και μαθηματικός, που γεννήθηκε στη Σάμο το 580 π.Χ., ίδρυσε την περίφημη Πυθαγόρειο Φιλοσοφική Σχολή. Με τις μελέτες του βοήθησε στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας.

Ο διπλανός πίνακας είναι επινόηση του Πυθαγόρα για να δείξει πώς υπολογίζονται τα γινόμενα του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών από το 0 ως το 10.

- Συμπλήρωσε τον πίνακα με τα υπόλοιπα γινόμενα.
- Τι παρατηρείς για τις γραμμές και τις στήλες του; Αναγνωρίζεις κάποιες σχέσεις;

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0									9	
2	0								16		20
3	0							21		27	
4	0						24		32		
5	0					25		35			
6	0				24		36				
7	0			21		35					
8	0		16		32						
9	0	9		27							
10	0		20								100

....

....

....

....

Δραστηριότητα 2η

Ο χορηγός της εθνικής ομάδας ποδηλασίας παρέχει ένα κράνος και μια στολή σε κάθε μέλος της ομάδας. Το κράνος στοιχίζει 45,8 € και η στολή 52 €. Η ομάδα αποτελείται από 5 άτομα.

- Με πόσους τρόπους μπορεί ο χορηγός να υπολογίσει το κόστος της χορηγίας;

....

....

....

....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών αριθμών	**Παραδείγματα**
Στον πολλαπλασιασμό, αν αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων, δεν αλλάζει το γινόμενο **(αντιμεταθετική ιδιότητα).**	παράγοντες γινόμενο 2 • 8 = 16 ή 8 • 2 = 16 2,5 • 8,4 = 21 ή 8,4 • 2,5 = 21
Για να πολλαπλασιάσουμε τρεις αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τους δύο μεταξύ τους και μετά το γινόμενό τους με τον τρίτο **(προσεταιριστική ιδιότητα).**	(2 • 3) • 5 = 6 • 5 = 30 ή 2 • (3 • 5) = 2 • 15 = 30 (2,5 • 3) • 4,2 = 7,5 • 4,2 = 31,5 ή 2,5 • (3 • 4,2) = 2,5 • 12,6 = 31,5
Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με άθροισμα δύο ή περισσότερων προσθετέων, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό με κάθε προσθετέο και να προσθέσουμε τα επιμέρους γινόμενα **(επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού** ως προς την **πρόσθεση**) Η ιδιότητα αυτή ισχύει και ως προς την **αφαίρεση.**	το γινόμενο **20 • (12 + 0,5)** μπορεί να βρεθεί κι έτσι: **20 • 12 + 20 • 0,5** = 240 + 10 = 250 20 • (12 - 2) = 20 • 12 - 20 • 2 = 240 - 40 = 200

Οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μας βοηθούν να υπολογίζουμε εύκολα γινόμενα με πολλούς αριθμούς. Ο πολλαπλασιασμός στους δεκαδικούς αριθμούς γίνεται όπως και στους φυσικούς. Στο γινόμενο τα δεκαδικά ψηφία είναι τόσα, όσα ήταν συνολικά τα δεκαδικά ψηφία σε όλους τους παράγοντες.

Εφαρμογή 1η

Πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με το 10, το 100, το 1.000 ...

Λύση:

Φυσικοί: Αρκεί να προσθέσω στο τέλος του αριθμού ένα 0 για να μεγαλώσει 10 φορές, δύο 0 για να μεγαλώσει 100 φορές, τρία 0 για να μεγαλώσει 1000 φορές κ.ο.κ.

8 • 10 = 80   8 • 100 = 800   8 • 1.000 = 8.000   8 • 10.000 = 80.000

Δεκαδικοί: Θυμάμαι ότι στους δεκαδικούς αριθμούς κάθε δεκαδικό ψηφίο είναι κατά δέκα φορές μεγαλύτερο από το ψηφίο που βρίσκεται στα δεξιά του. Άρα η μετακίνηση της υποδιαστολής μία θέση δεξιά μεγαλώνει τον αριθμό δέκα φορές: 8,255 • 10 = ...,.....

Εφαρμογή 2η

Πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με το 0,1 ή το 0,01 ή το 0,001 ...

Λύση:

Όταν πολλαπλασιάζω έναν αριθμό με το 1, ο αριθμός δε μεταβάλλεται. Το 0,1 είναι 10 φορές μικρότερο από το 1. Άρα όταν πολλαπλασιάσω τον αριθμό με το 0,1 τότε αυτός μικραίνει 10 φορές. Για να μικρύνω έναν αριθμό 10 φορές αρκεί να μετακινήσω την υποδιαστολή μια θέση προς τα αριστερά:

935 • 0,1 = 93,5   **935 • 0,01 = 9,35**   **93,5 • 0,01 = 0,935**

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **αντιμεταθετική ιδιότητα, προσεταιριστική ιδιότητα** και **επιμεριστική ιδιότητα** στον πολλαπλασιασμό. Εξήγησέ τους με παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Η ισότητα 35 • 10 • 0 = 350 είναι σωστή.	❒	❒
Το 5 • 19 + 5 • 6 μπορεί να γίνει 5 • (19 + 6) = 5 • 25 = 125	❒	❒
Η ισότητα: 0,31 • 0,1 = 0,31 είναι σωστή.	❒	❒

Κεφάλαιο 7ο

Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Δίκαιη μοιρασιά!

Διαιρώ φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Μελετώ τη διαίρεση ενός αριθμού με το 1 ή με τον εαυτό του.
Διαπιστώνω ότι η τέλεια διαίρεση είναι αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.
Διαιρώ με το 10, το 100, το 1000 … και με το 0,1, το 0,01, το 0,001 …

Δραστηριότητα 1η

Στο Δημοτικό Σχολείο Μετσόβου έφτασαν δύο δέματα με το Β΄ τεύχος του βιβλίου Μαθηματικών, της Στ΄ τάξης. Το ένα δέμα έχει 40 βιβλία και το άλλο 80. Η δασκάλα φώναξε 4 παιδιά για να τα μεταφέρουν.

- Πώς θα βρουν από πόσα βιβλία θα κουβαλήσει κάθε παιδί;

 ....

- Με πόσους τρόπους μπορείς να υπολογίσεις το αποτέλεσμα;

 ....

 ....

- Αν τα κουβαλούσαν 10 παιδιά;

 ....

- Αν διπλασιαστεί ο αριθμός των βιβλίων (120 • 2) και διπλασιαστεί και ο αριθμός των παιδιών (4 • 2) από πόσα βιβλία θα κουβαλήσει κάθε παιδί;

 .... Τι παρατηρείς; ....

Δραστηριότητα 2η

Στους παρακάτω πολλαπλασιασμούς συμπλήρωσε τους παράγοντες που λείπουν:

4 • .... = 36	**....... • 8 = 48**	**3 • .... = 63**	**10 • .... = 120**	**....... • 1000 = 4000**

- Με ποια διαδικασία τούς βρήκες; ....

 ....

- Ποια σχέση διακρίνεις ανάμεσα στη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό;
- Ποιες διαιρέσεις προκύπτουν από την ισότητα 6 • 8 = 48;

 α) ....

 β) ....

- Μπορείς με βάση τα προηγούμενα να εξηγήσεις το αποτέλεσμα της διαίρεσης 0 **:** 4 = 0;

 ....

- Μπορούμε να διαιρέσουμε έναν αριθμό με το μηδέν;

 ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε τα ακόλουθα:

Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών	Παραδείγματα
Τέλεια λέγεται η διαίρεση στην οποία το υπόλοιπο είναι 0. Όταν το υπόλοιπο είναι διαφορετικό από το 0, η διαίρεση λέγεται ατελής.	Διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο, υπόλοιπο 12 | 4 → 0 | 3 τέλεια 13 | 4 → 1 | 3 ατελής
Η τέλεια διαίρεση είναι πράξη **αντίστροφη** του πολλαπλασιασμού. Σε κάθε διαίρεση ο διαιρετέος είναι ίσος με το γινόμενο του διαιρέτη επί το πηλίκο συν το υπόλοιπο.	$4 \cdot 3 = 12$ $12 : 4 = 3$ ↔ $12 : 3 = 4$ $13 = 3 \cdot 4 + 1$
Κάθε αριθμός, αν διαιρεθεί με το 1, δίνει πηλίκο τον εαυτό του. Κάθε αριθμός, αν διαιρεθεί με τον εαυτό του, δίνει πηλίκο το 1.	$12 : 1 = 12$ $\quad 3{,}5 : 1 = 3{,}5$ $12 : 12 = 1$ $\quad 3{,}5 : 3{,}5 = 1$
Το 0, με όποιον αριθμό και αν διαιρεθεί, δίνει πηλίκο 0.	$0 : 12 = 0$ $\quad 0 : 3{,}5 = 0$
Σε κάθε διαίρεση, αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τους δύο όρους με τον ίδιο αριθμό, το πηλίκο δεν αλλάζει.	$12 : 3 = 4$ $(12 \cdot 2) : (3 \cdot 2) = 24 : 6 = 4$

Εφαρμογή 1η

Διαιρούμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με **10,** το **100,** το **1000** ...,

Λύση

Όταν διαιρώ έναν αριθμό με το 10, το 100, το 1000, ..., τότε ο αριθμός μικραίνει κατά 10 ή 100 ή 1000 ... φορές αντίστοιχα. Αρκεί λοιπόν **να μετακινήσω την υποδιαστολή 1 ή 2 ή 3 ... θέσεις προς τα αριστερά:**

8 : 10 = **0,8** **8 :** 100 = **0,08** **8 :** 1.000 = **0,008** 0,8 **:** 10 = ...,......

Εφαρμογή 2η

Διαιρούμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με το **0,1** ή το **0,01** ή το **0,001** ...,

Λύση

Γνωρίζω ότι το πηλίκο δεν αλλάζει, αν πολλαπλασιάσω το διαιρετέο και τον διαιρέτη με τον ίδιο αριθμό. Για να γίνει εύκολα η διαίρεση μπορώ να μετατρέψω το διαιρέτη στον αριθμό 1 πολλαπλασιάζοντας τον με το 10, το 100, το 1000, ...,

93,5 : 0,1 = (93,5 • 10) **:** (0,1 • 10) = 935 **:** 1 = **935**

458 : 0,01 = (458 • 100) **:** (0,01 • 100) = 45800 **:** 1 = **45.800**

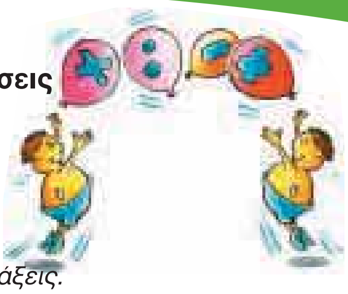
Παρατηρώ ότι για να διαιρέσω έναν αριθμό με το 0,1 ή το 0,01 ή το 0,001 ... αρκεί **να μετακινήσω την υποδιαστολή 1 ή 2 ή 3 ... θέσεις προς τα δεξιά**, σαν να τον πολλαπλασιάζω με το 10, το 100, το 1000, ..., αντίστοιχα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **τέλεια** και **ατελής** διαίρεση, διαίρεση αριθμού με το 1 ή με τον εαυτό του. Εξήγησε τους όρους αυτούς με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
*Η ισότητα: 10 **:** 2 = 2 **:** 10 είναι σωστή.*	❒	❒
*Από τη διαίρεση Δ **:** δ = π μπορώ να πω ότι ισχύει Δ = δ • π.*	❒	❒
Η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι πράξεις αντίστροφες.	❒	❒

Κεφάλαιο 8ο **Πράξεις με μεικτές αριθμητικές παραστάσεις**



Μαθαίνω τη γλώσσα των αριθμών

Διαπιστώνω την ανάγκη της προτεραιότητας σε μια σειρά από πράξεις.
Μαθαίνω τη σειρά των πράξεων για την επίλυση μιας αριθμητικής παράστασης.
Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις.
Σχηματίζω αριθμητικές παραστάσεις για τη λύση προβλημάτων.

Δραστηριότητα 1η *Πού πήγαν τα 90 λεπτά μου;*

Ο Τοτός πήγε στο βιβλιοπωλείο της γειτονιάς για να αγοράσει κάποια πράγματα έχοντας 10 €. Αγόρασε 10 τετράδια προς 0,45 € το ένα, 2 ντοσιέ προς 0,80 € το ένα και 1 μπλοκ ακουαρέλας προς 1,90 €. Έδωσε το χαρτονόμισμα των 10 € και πήρε 2 € ρέστα.

- Κάνοντας με το νου τις πράξεις υπολογίστε με την ομάδα σας τα χρήματα που ξόδεψε και γράψτε το αποτέλεσμα.

τετράδια		**ντοσιέ**		**μπλοκ**		**Σύνολο**
10 • 0,45	+	2 • 0,80	+	1,90	=	

Ο Τοτός, για να είναι σίγουρος, προτίμησε να κάνει τις πράξεις με τη σειρά στον υπολογιστή τσέπης που είχε: 10 X 0,45 + 2 X 0,80 + 1,90 = 7,/

- Ακολούθησε και συ την ίδια λογική και κάνε τις πράξεις με το μολύβι και την ίδια σειρά:

  10 • 0,45 + 2 • 0,80 + 1,90 = ...
- Με ποια σειρά έγιναν οι πράξεις με το νου;

  ....
- Με ποια σειρά έκανες τις πράξεις με το μολύβι στη δεύτερη περίπτωση;

  ....
- Ποιο αποτέλεσμα είναι σωστό;

  ....
- Μπορείτε με την ομάδα σας να προτείνετε έναν κανόνα για τη σειρά των πράξεων;

  ....

Δραστηριότητα 2η *Η σωστή σειρά*

Ο ζαχαροπλάστης Ανρί, αυτή την εβδομάδα, πούλησε 85 μερίδες μους σοκολάτας προς 3,80 € τη μία. Είχε προετοιμάσει όμως 100 μερίδες που του κόστισαν 2,40 € η μερίδα.

- Βοήθησε τον Ανρί να υπολογίσει το κέρδος του για αυτή την εβδομάδα στον πίνακα που ακολουθεί:

Έσοδα		**Έξοδα**		**Κέρδος**
85 • 3,8	–	100 • 2,4	=	

- Με ποια σειρά έκανες τις πράξεις; Πρώτα .... μετά ....

  και τέλος ....
- Μπορούσες να κάνεις τις πράξεις με διαφορετική σειρά; .... γιατί; ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε τα εξής:

Αριθμητικές παραστάσεις	**Παραδείγματα**
Μια σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων λέγεται **αριθμητική παράσταση**.	45 + 6 + 3,2 + 0,9 + 65 8 • 2,5 + 40
Ο τρόπος λύσης ενός προβλήματος μπορεί να εκφραστεί με την κατάλληλη αριθμητική παράσταση.	Αγόρασα 2 παγωτά των 0,90 € το καθένα και 3 μπουκαλάκια νερό των 0,45 € το καθένα. Πόσο πλήρωσα; *Λύση*: 2 • 0,90 + 3 • 0,45 = 1,80 + 1,35 = 3,15
Στις αριθμητικές παραστάσεις, οι πράξεις γίνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά με μια ορισμένη σειρά: α) **πρώτα πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις** και β) **μετά προσθέσεις και αφαιρέσεις**	15 **:** 3 • 5 + 3,5 = 5 • 5 + 3,5 = 25 + 3,5 = 28,5 (αφού η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός έχουν την ίδια προτεραιότητα, εκτελούμε τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά και μετά την πρόσθεση)
Αν υπάρχουν **παρενθέσεις**, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την ίδια σειρά.	(117,6 + 98,4) **:** (40 - 22) = 216 **:** 18 = 12

Εφαρμογή 1η

Ο Ανρί για το μους σοκολάτας αγόρασε τα εξής υλικά: 2,5 κιλά σοκολάτα προς 16,8 € το κιλό, 1,25 κιλά βούτυρο προς 10,2 € το κιλό, 40 αβγά προς 0,65 € το ένα, 1,5 κιλά κρέμα γάλακτος προς 7,5 € το κιλό και 1,25 κιλά ζάχαρη προς 3,2 € το κιλό. Υπολόγισε πόσο του κοστίζει κάθε μερίδα, αφού με τα υλικά που αγόρασε έφτιαξε 40 μερίδες.

Λύση

Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε πόσο πλήρωσε για την αγορά κάθε υλικού, μετά να προσθέσουμε τα επιμέρους ποσά και να διαιρέσουμε το συνολικό άθροισμα με το 40 για να βρούμε πόσο κοστίζει η 1 μερίδα.

Για να γίνουν οι προσθέσεις πριν από τη διαίρεση, πρέπει να μπουν σε παρένθεση. Μέσα στην παρένθεση η προτεραιότητα των πράξεων αρκεί για να τηρηθεί η σωστή σειρά:

(2,5 • 16,8 + 1,25 • 10,2 + 40 • 0,65 + 1,5 • 7,5 + 1,25 • 3,2) **:** 40 = (42 + 12,75 + 26 + 11,25 + 4) **:** 40 = 96 **:** 40 = 2,4

Απάντηση: Κάθε μερίδα στοιχίζει 2,4 €

Εφαρμογή 2η

Να λύσετε την αριθμητική παράσταση: 25 + 32 **:** 8 – 5 • 4

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αρχίζουμε από αριστερά, πρώτα κάνοντας τις διαιρέσεις και τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις:

25 + 32 **:** 8 – 5 • 4 = 25 + 4 - 20 = 29 - 20 = 9

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

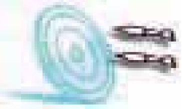
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αριθμητική παράσταση**. Εξήγησέ τον με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Μια σειρά αριθμών λέγεται αριθμητική παράσταση.	❒	❒
Στις αριθμητικές παραστάσεις οι προσθέσεις μπαίνουν σε παρένθεση.	❒	❒
Δεν μπορώ να κάνω αριθμητική παράσταση χωρίς παρενθέσεις.	❒	❒

Κεφάλαιο 9ο

Λύνω σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων

Μιλώ τη γλώσσα των αριθμών



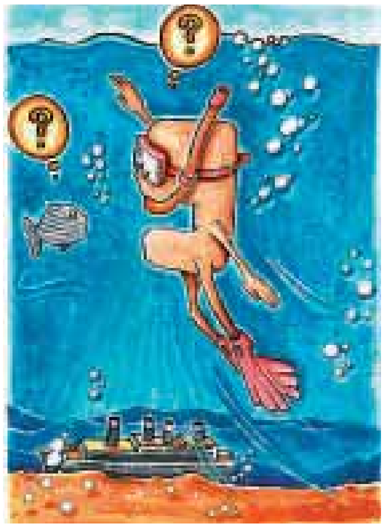
Λύνω ένα πρόβλημα ακολουθώντας μια σειρά από βήματα.
Λύνω σύνθετα προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες και τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων.

Τώρα που «φρεσκάραμε» τις γνώσεις μας για τους φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς και για τις ιδιότητες των πράξεων, και αφού εξασκηθήκαμε με ασκήσεις και προβλήματα για κάθε τομέα ξεχωριστά, ας εξασκηθούμε περισσότερο εφαρμόζοντας τις γνώσεις μας σε γενικότερα προβλήματα, όπως είναι αυτά που έτσι κι αλλιώς συναντάμε κάθε μέρα.

Δραστηριότητα

Το υπερωκεάνιο “Τιτανικός” βυθίστηκε το 1912. Οι επιβάτες του ήταν 1316 άτομα και το πλήρωμά του 885. Είχε 20 σωσίβιες λέμβους, η καθεμία από τις οποίες χωρούσε 58 άτομα. Στο ναυάγιο χάθηκαν 1490 άτομα. Αν γέμιζαν όλες οι σωσίβιες λέμβοι, πόσο περισσότεροι διασωθέντες θα υπήρχαν;

Αφού διαβάσεις με προσοχή το πρόβλημα, απάντησε στις ερωτήσεις:



- Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία που θα σε βοηθήσουν στη λύση;
  (τι ξέρεις;) ....
  ....
  ....
- Ποια είναι τα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος;
  (τι δεν ξέρεις;)...
- Πώς σχετίζονται τα γνωστά με τα άγνωστα στοιχεία;
  ....
- Οργάνωσε το σχέδιο λύσης και διάλεξε ποιες πράξεις θα χρησιμοποιήσεις **(+) (-) (:) (.)**
  Αρχικά θα κάνω................................ ώστε να ....
  ....
  Στη συνέχεια θα ....
  Τέλος..
- Κάνε τις πράξεις. (Μπορείς με το νου ή με χαρτί και μολύβι.)
  ....
  ....
  ....
- Απάντησε στο πρόβλημα.
  ....
- Έλεγξε αν είναι η απάντηση λογική σύμφωνα με τα δεδομένα.
  ....

Η προηγούμενη δραστηριότητα μας βοηθά να συμπεράνουμε τα εξής:

Λύνω προβλήματα

Όταν έχω να λύσω ένα πρόβλημα ακολουθώ με τη σειρά τα παρακάτω βήματα:
Αν δεν είναι γραμμένο, το γράφω γιατί έτσι θα μπορέσω να το μελετήσω καλύτερα:

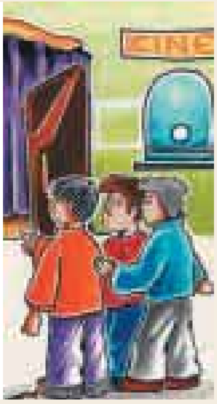
- ✓ **Διαβάζω** (όσες φορές είναι απαραίτητο) μέχρι να μπορώ να πω με βεβαιότητα ότι **κατάλαβα:**
  α. Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία (δεδομένα).
  β. Ποια είναι τα άγνωστα (ζητούμενα).
- ✓ **Καταστρώνω** ένα σχέδιο λύσης και αποφασίζω ποιες πράξεις θα κάνω για να λύσω το πρόβλημα.
- ✓ **Εκτελώ** τις πράξεις με προσοχή.
- ✓ **Απαντώ** στην ερώτηση του προβλήματος.

Τέλος **ελέγχω** αν το αποτέλεσμα είναι λογικό. Αν δεν είναι, αρχίζω τα βήματα από την αρχή.

Εφαρμογή

Πόσα ρέστα θα πάρω από 25 €, αν πληρώσω 3 εισιτήρια στον κινηματογράφο, το καθένα από τα οποία κοστίζει 7,20 €;

Λύση



Βήμα 1: Αφού διαβάσω καλά το πρόβλημα, χωρίζω τα γνωστά από τα άγνωστα στοιχεία

Ξέρω (γνωστά - γ):	Δεν ξέρω (άγνωστα - α):
Πόσα εισιτήρια θα αγοράσω (γ1), πόσο κοστίζει το ένα εισιτήριο (γ2) και πόσα χρήματα έδωσα (γ3).	Πόσο κοστίζουν συνολικά τα εισιτήρια (α1) και πόσα ρέστα θα πάρω (α2).

Βήμα 2: Οργανώνω σχέδιο λύσης
Για να βρω πόσα ρέστα θα πάρω (α2) πρέπει να αφαιρέσω το συνολικό κόστος των εισιτηρίων (α1) από τα χρήματα που έδωσα (γ3). Άρα πρέπει
1. Πρώτα να βρω πόσο κάνουν τα εισιτήρια (α1) και μετά
2. Να αφαιρέσω αυτό που θα βρω (α1) από τα χρήματα που έδωσα (γ3).

Βήμα 3: Κάνω τις πράξεις
1. Για να βρω πόσο κάνουν τα εισιτήρια θα πολλαπλασιάσω το 7,20 με το 3: **7,20 · 3 = ... €**
2. Για να βρω πόσα ρέστα θα πάρω, θα αφαιρέσω αυτό που βρήκα από το 25: **25 - ..... = ... €**

ή **25 - 7,20 · 3 = ... = ... = ... €**

Σημείωση: Μπορώ να κάνω τις πράξεις με το νου, με μολύβι και χαρτί ή με τον υπολογιστή τσέπης.

Απάντηση: Θα πάρω .... € ρέστα.

Βήμα 4: Ελέγχω την απάντηση σε σχέση με την ερώτηση.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την **τεχνική επίλυσης προβλημάτων.** Θυμήσου και ανάφερε τα 4 βήματα της τεχνικής.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Αν λύσεις το πρόβλημα δεν είναι απαραίτητο και να γράψεις την απάντηση αφού θα την ανακαλύψουν ανάμεσα στις πράξεις.	❒	❒
Το αποτέλεσμα δεν φαίνεται λογικό. Δεν πειράζει, αφού σίγουρα έχω κάνει τις πράξεις σωστά.	❒	❒
Η σχέση ανάμεσα στα γνωστά και στα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος με βοηθά να αποφασίσω ποιες πράξεις θα κάνω.	❒	❒

Κεφάλαιο 10ο Η χρήση του υπολογιστή τσέπης

Ένα μηχάνημα που μιλάει μαθηματικά μαζί μου

Μαθαίνω τη χρήση του υπολογιστή τσέπης.
Διακρίνω σε ποιες περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοποιήσω τον υπολογιστή τσέπης.
Λύνω προβλήματα με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης.

Δραστηριότητα 1η

Ο υπολογιστής τσέπης είναι ένα εργαλείο που μας βοηθά να υπολογίζουμε τις μεγάλες και χρονοβόρες πράξεις εύκολα και γρήγορα. Ας πάρουμε στα χέρια μας έναν υπολογιστή τσέπης κι ας ανακαλύψουμε πώς λειτουργεί και πώς χρησιμοποιείται.

- Μπορείς να τον «ανοίξεις»;
- Πώς βλέπεις ότι έχει «ανοίξει»;
- Βεβαιώσου ότι εντόπισες τα παρακάτω πλήκτρα και ότι ξέρεις τι κάνουν:

+ .... – ....

x .... ÷ ....

= .... • ....

C ....

- Παρατήρησε τι εμφανίζεται στην οθόνη, καθώς πατάς κάθε πλήκτρο και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

η οθόνη εμφανίζει:	**3**	**38**	**38**				
καθώς πληκτρολογώ:	**3**	**8**	**+**	**7**	**9**	**9**	**=**

- Κάνε μερικούς υπολογισμούς, παρατηρώντας κάθε φορά την οθόνη:

952,90 – 860 = **16,05 • 437 =** **0,80 + 0,32 + 6,58 =** **2048 : 50 =**

Δραστηριότητα 2η

Ο υπολογιστής τσέπης δεν αντικαθιστά τις υπόλοιπες μεθόδους υπολογισμού! Επιλέγω πότε πρέπει να εργαστώ με το **νου,** με **χαρτί** και **μολύβι** ή με **υπολογιστή τσέπης.** Επέλεξε με ποια από τις τρεις μεθόδους μπορείς να απαντήσεις πιο γρήγορα σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις. Μέτρησε και σημείωσε για κάθε περίπτωση πόσα πλήκτρα πρέπει να πατήσεις στον υπολογιστή τσέπης.

- 110 + 24 = ...
- 1100 **:** 10 = ...
- Είναι τέλεια η διαίρεση 99578 **:** 2; **ΝΑΙ** – **ΟΧΙ** ....
- (2 • 48 + 112 **:** 2 – 4 • 0,5) **:** 2 = ...
- 32 • 22459,90 = ...
- Είναι πάντα η χρήση του υπολογιστή τσέπης η πιο σύντομη μέθοδος; ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

Ο υπολογιστής τσέπης

✓ **(Πότε;)** Χρησιμοποιούμε τον υπολογιστή τσέπης για να πραγματοποιήσουμε γρήγορα μεγάλους υπολογισμούς, ή για να κάνουμε γρήγορη επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας.

✓ **(Τι είδους;)** Διαλέγουμε έναν υπολογιστή απλό κι εύχρηστο και όχι κάποιον με χαρακτηριστικά που δεν μας χρειάζονται όπως, για παράδειγμα, να κάνει επιστημονικούς υπολογισμούς και γραφήματα ή να έχει μουσική και ρολόι.

✓ **(Όρια;)** Σε έναν υπολογιστή τσέπης η οθόνη «χωράει» συνήθως 8 ή 9 ψηφία. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να επεξεργαστεί αριθμούς με περισσότερα ψηφία από αυτά.

✓ **(Έλεγχος;)** Το αποτέλεσμα της πράξης που κάναμε στον υπολογιστή τσέπης χρειάζεται να το εξετάζουμε με τη λογική. Αρκετές φορές καταλήγουμε σε λανθασμένους υπολογισμούς, γιατί είτε κάναμε λάθος στην πληκτρολόγηση κάποιου συμβόλου ή της υποδιαστολής είτε δεν λάβαμε υπόψη τη σειρά των πράξεων.

Εφαρμογή 1η

Θυμάστε την αποτυχημένη προσπάθεια του Τοτού να βρει το σωστό αποτέλεσμα υπολογίζοντας την αριθμητική παράσταση $10 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}80 + 1{,}90$ στον υπολογιστή τσέπης; Μπορεί να βρεθεί το αποτέλεσμα χωρίς να χρειαστεί να σημειώνουμε τα επιμέρους αποτελέσματα σε χαρτί;

Λύση:

Για να τηρηθεί η σωστή σειρά κατά την εκτέλεση των πράξεων:

α. Κάνουμε τον 1ο πολλαπλασιασμό και σημειώνουμε το αποτέλεσμά του κάπου.

β. Κάνουμε το 2ο πολλαπλασιασμό και σημειώνουμε το αποτέλεσμά του.

γ. Προσθέτουμε τα δύο αποτελέσματα.

δ. Προσθέτουμε το 1,90 στο προηγούμενο άθροισμα.

Ο υπολογιστής τσέπης έχει έναν χώρο μνήμης στον οποίο μπορούμε να αποθηκεύουμε αριθμούς που θα προστεθούν μεταξύ τους. Το πλήκτρο **M+** αθροίζει διαδοχικά μέσα στη μνήμη τους αριθμούς που βάζουμε. Το πλήκτρο **MR** εμφανίζει τον αριθμό που υπάρχει αυτή τη στιγμή στη μνήμη και το πλήκτρο **MC** «αδειάζει» τη μνήμη. Αυτή η αριθμητική παράσταση, λοιπόν μπορεί να γίνει στον υπολογιστή τσέπης ως εξής: 10 **X** 0 **.** 45 **=** **M+** 2 **X** 0 **.** 80 **=** **M+** 1 **.** 90 **M+** **MR**

Εφαρμογή 2η

Η καρδιά ενός ανθρώπου κάνει κατά μέσο όρο 70 χτύπους το λεπτό. Πόσους χτύπους έχει κάνει η καρδιά σου μέχρι τώρα, δηλαδή κατά τη διάρκεια των 12 χρόνων που λειτουργεί;

Λύση:

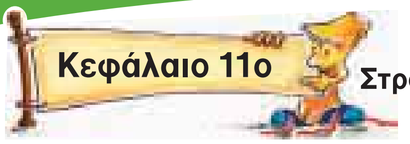
Βρίσκουμε πρώτα πόσους παλμούς κάνει την ώρα, μετά πόσους την ημέρα, έπειτα πόσους το χρόνο και τέλος πόσους τα 12 χρόνια: 70 **X** 60 **X** 24 **X** 360 **X** 12 **=** 435.456.000

Απάντηση: Έχει κάνει 435.456.000 παλμούς ως τώρα!

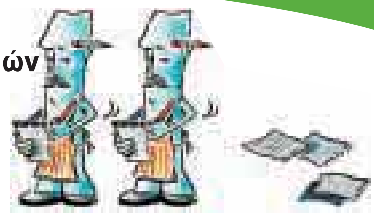
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη χρήση του **υπολογιστή τσέπης**. Θυμήσου τα βήματα στην επίλυση ενός προβλήματος και πες σε ποιο βήμα μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Το πλήκτρο **C** *«καθαρίζει» την οθόνη.*	❐	❐
Με τον υπολογιστή τσέπης δεν χρειάζεται να κάνουμε έλεγχο του αποτελέσματος με τη λογική, γιατί δεν κάνει ποτέ λάθη.	❐	❐
Οι μεγάλες πράξεις είναι αδύνατον να γίνουν χωρίς υπολογιστή τσέπης.	❐	❐



Στρογγυλοποίηση φυσικών και δεκαδικών αριθμών



Πρόχειροι λογαριασμοί

Κατανοώ τους κανόνες της στρογγυλοποίησης.
Στρογγυλοποιώ φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Εκτιμώ το αποτέλεσμα μιας πράξης κατά προσέγγιση.

Σε μερικές περιπτώσεις δεν μας είναι απαραίτητο να εκφραζόμαστε με απόλυτη ακρίβεια. Τότε στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς, ώστε να είναι εύκολο να τους θυμόμαστε.

Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται οι τρεις πολυπληθέστερες χώρες του κόσμου και ο συνολικός πληθυσμός της γης το έτος 2003.

Κίνα	**1.286.975.468**	
Ινδία	**1.049.700.118**	
Η.Π.Α.	**290.342.554**	

Σύνολο Γης	**6.302.309.691**	
Πηγή: "The World Factbook 2003", CIA		

- Είναι εύκολο διαβάζοντας τον πίνακα να θυμηθείς τα στοιχεία;
- Προσπάθησε, στην κενή στήλη να γράψεις για κάθε χώρα έναν αριθμό που να δείχνει περίπου τον πληθυσμό της και να είναι πιο εύκολο να τον θυμηθείς.
- Πόση είναι περίπου η διαφορά των πληθυσμών της Κίνας και της Ινδίας; ....
- Φαίνεται η διαφορά αυτή και μετά τη στρογγυλοποίηση που έκανες;

Δραστηριότητα 2η

Στο γραφείο «Αγωγής Υγείας» τα παιδιά παρατήρησαν το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνονται σημειωμένες οι θερμίδες που καίει κάποιος όταν κάνει ορισμένες δραστηριότητες για 1 ώρα (π.χ. κολύμπι, τρέξιμο, ποδηλασία, χορός, μπάσκετ, ποδόσφαιρο).

Χρησιμοποιώντας το σχήμα στρογγυλοποιήστε τις μετρήσεις στη δεκάδα:

- 223: ....
- 247: ....
- 256: ....
- 283: ....
- 298: ....
- 305: ....
- Πώς αποφασίσατε σε ποια δεκάδα θα στρογγυλοποιήσετε κάθε μέτρηση; ....
....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Στρογγυλοποίηση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Συχνά στη θέση κάποιου αριθμού χρησιμοποιούμε κάποιον άλλο, μικρότερο ή μεγαλύτερο, πολύ κοντινό στον αρχικό, για πρακτικούς λόγους. Αυτή η διαδικασία λέγεται **στρογγυλοποίηση**.

Ανάλογα με την περίπτωση στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς στα δέκατα, στα εκατοστά, στις δεκάδες, στις εκατοντάδες ή όπου είναι πιο κατάλληλο για να διευκολυνθούμε στους λογαριασμούς μας, χωρίς να παραποιηθεί η πραγματικότητα.

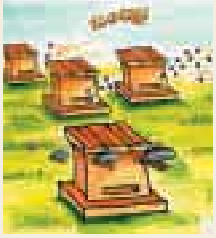
Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν αριθμό εξετάζουμε τα εξής:
Αν το **ψηφίο** που βρίσκεται στα **δεξιά** από εκείνο στο οποίο θέλουμε να γίνει η στρογγυλοποίηση είναι **0**, **1**, **2**, **3** ή **4**, τότε απλώς το αντικαθιστούμε, όπως και όλα τα επόμενα προς τα δεξιά, με μηδενικά.
Αν το **ψηφίο** που βρίσκεται στα **δεξιά** είναι **5**, **6**, **7**, **8** ή **9**, τότε αυξάνουμε το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε κατά μία μονάδα και μετά αντικαθιστούμε τα ψηφία στα δεξιά του με μηδενικά.

Παραδείγματα

- Ο υπολογιστής τσέπης κοστίζει 4,95 €. Αντί για το ακριβές ποσό, λέμε: «κοστίζει περίπου 5 €».
- Το βάρος μου είναι 68 κιλά.
  Περίπου 70 (σωστό).
  Περίπου 100 (λάθος).
- Σ' έναν αγώνα υπήρχαν 4.815 θεατές.
  Στρογγυλοποιώ στις εκατοντάδες: υπήρχαν περίπου 4.800 θεατές.
- Σε άλλον αγώνα υπήρχαν 4.875 θεατές.
  Στρογγυλοποιώ: υπήρχαν περίπου 4.900 θεατές.

Δεν στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται ως κώδικας επικοινωνίας (π.χ. ο αριθμός της ταυτότητας ή της πινακίδας του αυτοκινήτου, ο Τ.Κ. του σπιτιού κ.λπ.).

Εφαρμογή 1η

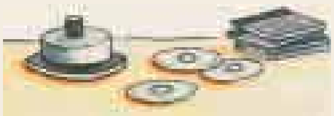


Μια συνηθισμένη κυψέλη έχει 12.475 μέλισσες. Πόσες μέλισσες έχει περίπου ένας μελισσοκόμος με 6 κυψέλες;

Λύση

Για να κάνουμε έναν γρήγορο, κατά προσέγγιση, υπολογισμό θα στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 12.475 στην πλησιέστερη εκατοντάδα, θα γίνει δηλαδή 12.500.
Άρα 12.500 • 6 = 75.000
Απάντηση: Έχει περίπου 75.000 μέλισσες.

Εφαρμογή 2η



Ένα κουτί με CD εγγραφής κοστίζει 1,29 €. Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε κατά προσέγγιση για 5 κουτιά;

Λύση

Για ένα γρήγορο, κατά προσέγγιση, υπολογισμό θα στρογγυλοποιήσουμε το 1,29 στο πλησιέστερο δέκατο, θα γίνει δηλαδή 1,30.
Άρα 1,30 • 5 = 6,50.
Απάντηση: Θα πληρώσουμε περίπου 6,5 €.

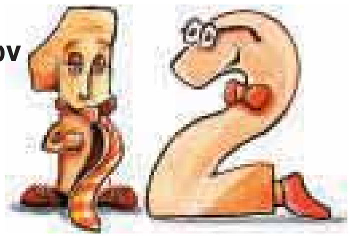
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη **στρογγυλοποίηση των αριθμών**. Εξήγησε με ένα παράδειγμα τη διαδικασία της στρογγυλοποίησης.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
➾ *Στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς των τηλεφώνων.*	❒	❒
➾ *Στρογγυλοποιούμε πάντα όταν κάνουμε υπολογισμούς.*	❒	❒
➾ *Ο αριθμός 25.109 στρογγυλοποιημένος στις εκατοντάδες γίνεται 25.100.*	❒	❒

Κεφάλαιο 12ο

Διαιρέτες ενός αριθμού – Μ.Κ.Δ. αριθμών



Μπαίνεις μόνο αν χωράς ακριβώς

Μαθαίνω τι είναι ο διαιρέτης ενός φυσικού αριθμού.
Βρίσκω τους διαιρέτες ενός αριθμού.
Εντοπίζω τους κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσότερων αριθμών και βρίσκω τον μεγαλύτερο.

Δραστηριότητα 1η

Σε ένα κουτί με μπισκότα αναγράφεται:
«35 μπισκότα, σε χωριστές αεροστεγείς συσκευασίες»

- Πόσες ίδιες χωριστές συσκευασίες νομίζεις ότι έχει το κουτί;

  ....

- Πόσα μπισκότα έχει κάθε χωριστή συσκευασία;

  ....

- Υπάρχουν άλλες περιπτώσεις; ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

Στο ζαχαροπλαστείο του Ανρί ετοιμάζουν συσκευασίες με διάφορα γλυκά. Μια μέρα έχουν 40 τρουφάκια, 48 εκλέρ και 32 καριόκες. Μοιράζουν τα γλυκά με τέτοιο τρόπο, ώστε όλα τα κουτιά να είναι ίδια μεταξύ τους, να είναι όσο το δυνατό περισσότερα και να μην περισσεύει κανένα γλυκό. Πώς τα μοίρασαν;

- Αν είχαν να μοιράσουν μόνο τα 40 τρουφάκια, σε πόσα **ίδια** κουτιά θα μπορούσαν να τα μοιράσουν; ....
- Συμπληρώστε: *σε 2 (από 20 γλυκά), ή σε 4* ....
- Υπολογίστε το ίδιο για τα 48 εκλέρ; *σε* ....

  ....

- Βρείτε το ίδιο για τις 32 καριόκες; *σε* ....

  ....

- Υπογραμμίστε τους αριθμούς των κουτιών που είναι κοινοί (ίδιοι) και στις 3 σειρές.
- Αν χρησιμοποιήσουν μόνο 2 ίδια κουτιά στα οποία θα βάλουν όλα τα γλυκά, γράψτε πόσα γλυκά από κάθε είδος θα περιέχει το καθένα:

  ....

- Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ίδιων κουτιών που μπορούν να γεμίσουν με γλυκά από κάθε είδος;

  ....

- Πόσα γλυκά από κάθε είδος θα έχει κάθε κουτί σ' αυτή την περίπτωση;

  Θα περιέχει:..

Πολλές φορές χρειάζεται να εξετάσουμε με πόσους δυνατούς τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε έναν αριθμό χωρίς να έχουμε υπόλοιπο. Αυτό γίνεται βρίσκοντας τους διαιρέτες του αριθμού αυτού.

Διαιρέτες αριθμού, Μ.Κ.Δ. αριθμών	Παραδείγματα
Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρεί ακριβώς έναν άλλο φυσικό αριθμό λέγεται **διαιρέτης** του.	Ο αριθμός 9 έχει διαιρέτες τους αριθμούς: 1, 3, 9.
Δύο ή περισσότεροι φυσικοί αριθμοί μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους λέγεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.).**	Ο αριθμός 16 έχει διαιρέτες τους αριθμούς: 1, 2, 4, 8, 16. Ο αριθμός 24 έχει διαιρέτες τους: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Οι αριθμοί 1, 2, 4, 8 είναι κοινοί διαιρέτες του 16 και του 24. Ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης τους είναι το 8.

Εφαρμογή 1η

Έχω μια συλλογή με 20 φωτογραφίες και θέλω να τις βάλω στο άλμπουμ με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σελίδα να έχει τον ίδιο αριθμό φωτογραφιών. Με πόσους τρόπους μπορώ να τις χωρίσω (εκτός από το να βάλω μία φωτογραφία σε κάθε σελίδα) ξέροντας ότι η σελίδα χωράει μέχρι 10 φωτογραφίες;

Λύση

Οι φωτογραφίες πρέπει να μοιραστούν σε ίσα μέρη, χωρίς να περισσεύει καμία. Κάθε μέρος θα είναι αριθμός που διαιρεί το 20 ακριβώς, θα είναι δηλαδή διαιρέτης του.

Αρκεί λοιπόν να βρω τους διαιρέτες του 20, για να έχω όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους μπορώ να βάλω τις φωτογραφίες στις σελίδες.

Διαιρέτες του 20 είναι οι αριθμοί: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Απάντηση: Άρα μπορώ να βάλω .... φωτογραφίες σε κάθε σελίδα.

Εφαρμογή 2η

Ένας βιβλιοπώλης θέλει να φτιάξει όσο το δυνατό περισσότερα όμοια πακετάκια με χρωματιστές πλαστελίνες. Έχει 48 πράσινες και 60 κόκκινες πλαστελίνες. Πόσα πακετάκια θα φτιάξει, χωρίς να του περισσέψει καμία πλαστελίνη;

Λύση

Πρέπει να βρούμε πρώτα τους διαιρέτες του 48 και του 60 και μετά από τους κοινούς διαιρέτες τους να διαλέξουμε τον μεγαλύτερο (το Μ.Κ.Δ.).

Διαιρέτες του 48 είναι οι αριθμοί: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Διαιρέτες του 36 είναι οι αριθμοί: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Μ.Κ.Δ. (48, 36): ....

Απάντηση: Ο βιβλιοπώλης θα φτιάξει .... πακέτα.

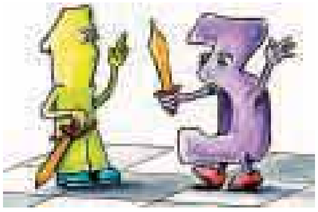
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **διαιρέτης** και **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)**. Εξήγησε τον καθένα με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Κάθε φυσικός αριθμός έχει διαιρέτες τουλάχιστον το 1 και τον εαυτό του.	❐	❐
Ο αριθμός 3 είναι διαιρέτης του αριθμού 26.	❐	❐
Ο Μ.Κ.Δ. του 4 και του 8 είναι το 8.	❐	❐

Κεφάλαιο 13ο

Κριτήρια διαιρετότητας



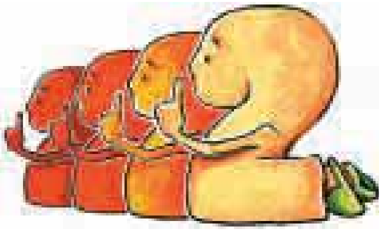
Μάντεψε το μυστικό κανόνα μου

Διακρίνω ποιοι αριθμοί διαιρούνται με το 2, το 3, το 5, το 9, το 10 ή το 25.
Ανακαλύπτω κριτήρια για να ξεχωρίζω αν ένας αριθμός διαιρείται με το 2, το 3, το 5, το 9, το 10 ή το 25.
Λύνω προβλήματα χρησιμοποιώντας τα κριτήρια διαιρετότητας.

Δραστηριότητα 1η

Ένα σχολείο έχει 165 κορίτσια και 132 αγόρια. Είναι δυνατό τα κορίτσια να παραταχθούν σε δυάδες, τριάδες ή πεντάδες χωρίς να περισσεύει κανένα; Μπορεί να συμβεί το ίδιο με τα αγόρια;

- Ποια πράξη θα κάνεις για να χωρίσεις τα παιδιά σε δυάδες και να διαπιστώσεις αν χωρίζονται ακριβώς ή αν περισσεύει κανένα;..
- Κάνε την πράξη για τα **κορίτσια:** ....
- Κάνε το ίδιο για τα **αγόρια:** ....
- Κάνε την πράξη για τα **κορίτσια** σε τριάδες:...
- Κάνε το ίδιο για τα **αγόρια:** ....
- Κάνε την πράξη για τα **κορίτσια** σε πεντάδες: ....



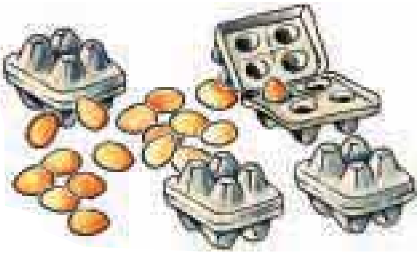
- Κάνε το ίδιο για τα **αγόρια:** ....
- Μπορείς να βρεις έναν κανόνα για τη διαίρεση ενός αριθμού με το 5;

  Ένας αριθμός διαιρείται με 5 όταν ....
- Ένα κανόνα για τη διαίρεση ενός αριθμού με το 2,

  Ένας αριθμός ....

Δραστηριότητα 2η

Στη Γεωργική Σχολή Θεσσαλονίκης συσκευάζουν τα αβγά σε αβγοθήκες 4 θέσεων. Τα αβγά που έχουν να συσκευάσουν σήμερα είναι 104. Μπορούν να συσκευαστούν σε τετράδες χωρίς να περισσέψει κανένα; Μπορεί να βρεθεί κανόνας, ώστε οι υπεύθυνοι να γνωρίζουν αν τα αβγά κάθε ημέρας συσκευάζονται σε τετράδες ακριβώς;



- Κάνοντας τη διαίρεση, διαπιστώνετε αν υπάρχει υπόλοιπο.

  ....
- Τα πολλαπλάσια του 104 θα διαιρούνται ακριβώς με το 4;
- Γράψτε μερικά από αυτά: ....
- Τι κοινό έχουν τα τελευταία ψηφία των αριθμών αυτών;

  ....
- Διατυπώστε έναν κανόνα.

  ....

Πολλές φορές μας χρειάζεται να διακρίνουμε αν ένας αριθμός διαιρείται ακριβώς από έναν άλλο. Για να διευκολυνθούμε όσο γίνεται έχουμε ανακαλύψει κάποιους κανόνες, στους οποίους υπακούουν όλοι οι φυσικοί αριθμοί. Είναι τα κριτήρια διαιρετότητας:

Κριτήρια διαιρετότητας	Παραδείγματα
1. **Ένας αριθμός διαιρείται με το 10, το 100, το 1000, ...,** αν τελειώνει σε ένα, δύο, τρία, ... μηδενικά αντίστοιχα.	Ο αριθμός 230 διαιρείται με το 10, ο αριθμός 2300 με το 10 και το 100, ...
2. **Ένας αριθμός διαιρείται με το 2,** αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, 8.	Οι αριθμοί 6, 28, 374, 1350 διαιρούνται με το 2.
3. **Ένας αριθμός διαιρείται με το 5,** αν τελειώνει σε 0 ή σε 5.	Οι αριθμοί 75, 105, 300, 2630 διαιρούνται με το 5.
4. **Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9,** αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή με το 9.	Ο αριθμός 201 διαιρείται με το 3, ενώ ο αριθμός 261 διαιρείται με το 3 και το 9.
5. **Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 ή το 25,** αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4 ή με το 25.	Το 132 διαιρείται με το 4, ενώ το 275 διαιρείται με το 25.
Οι αριθμοί που διαιρούνται με το 2 λέγονται **άρτιοι (ζυγοί)** αριθμοί.	2, 4, ..., 98, 100, ..., 948,...

Εφαρμογή 1η

Οι μαθητές ενός σχολείου είναι περισσότεροι από 283 και λιγότεροι από 293. Είναι δυνατό να παραταχθούν σε τριάδες ή πεντάδες χωρίς να περισσεύει κανένας. Πόσοι είναι;

Λύση

Αφού οι μαθητές παρατάσσονται σε τριάδες ή πεντάδες, αυτό σημαίνει πως το σύνολό τους είναι αριθμός που διαιρείται με το 3 αλλά και με το 5 ταυτόχρονα. Ανάμεσα στους αριθμούς 283 και 293 υπάρχουν μόνο 2 αριθμοί που διαιρούνται με το 5: το 285 και το 290. Το 285 διαιρείται και με το 3 (γιατί 2 + 8 + 5 = 15), αλλά το 290 δεν διαιρείται με το 3 (γιατί 2 + 9 + 0 = 11).

Απάντηση: Οι μαθητές είναι ....

Εφαρμογή 2η

Στην παρέλαση τα παιδιά προσπάθησαν να μετρήσουν τα άρματα. Στο τέλος όμως διαφώνησαν, καθώς άλλοι έλεγαν ότι ήταν 57 και άλλοι 59. Μπορείς να βρεις ποιος έχει δίκιο, αν ξέρεις ότι τα άρματα περνούσαν σε τριάδες;

Λύση

Αφού ξέρουμε ότι τα άρματα περνούσαν σε τριάδες, αυτό σημαίνει ότι το σύνολό τους ήταν αριθμός που διαιρείται με το 3. Το 57 διαιρείται (γιατί 5 + 7 = 12) ενώ το 59 δεν διαιρείται (γιατί 5 + 9 = 14).

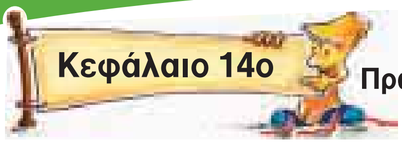
Απάντηση: Δίκιο έχουν τα παιδιά που υποστηρίζουν ότι τα άρματα ήταν ....

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε τα **κριτήρια διαιρετότητας**. Θυμήσου κάθε κριτήριο αναφέροντας ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Ο αριθμός 309 διαιρείται με το 3 και με το 9.	❒	❒
Όποιος αριθμός διαιρείται ακριβώς με το 2 είναι ζυγός αριθμός.	❒	❒
Μπορώ να πω αν θα έχω υπόλοιπο σε μια διαίρεση με το 5 χωρίς να κάνω την πράξη.	❒	❒



Κεφάλαιο 14ο

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Είμαστε και οι πρώτοι!

Γνωρίζω τους πρώτους και τους σύνθετους αριθμούς.
Μαθαίνω τι είναι το «κόσκινο του Ερατοσθένη».
Διακρίνω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος με τα κριτήρια διαιρετότητας.

Δραστηριότητα 1η

Στο Δημοτικό Σχολείο Σύμης, τα παιδιά της ΣΤ΄ τάξης, μετά το μάθημα για τους διαιρέτες των αριθμών και τα κριτήρια διαιρετότητας, αποφάσισαν να παίξουν ένα παιχνίδι. Το ονόμασαν «δεν μπαίνω σε σειρές» και αναρωτήθηκαν: «*Πόσα παιδιά πρέπει να έχει μια τάξη ώστε να μην μπορούν να παραταχθούν σε σειρές χωρίς να περισσεύει έστω και ένα παιδί;*»

Ποιο κριτήριο δεν πρέπει να ικανοποιεί ο αριθμός που ψάχνουν για να μην μπορούν να παραταχθούν σε:

- **Δυάδες:** ....
- **Τριάδες:** ....
- **Τετράδες:** ....
- **Πεντάδες:** ....
- Μπορείς τώρα να βρεις τους πιθανούς αριθμούς μαθητών που φαντάστηκαν τα παιδιά; (Μια τάξη έχει μέχρι 30 μαθητές.)

  ....

- Τι παρατηρείς για τους διαιρέτες αυτών των αριθμών;

Δραστηριότητα 2η

«Το κόσκινο του Ερατοσθένη»

Ο Ερατοσθένης, σπουδαίος Έλληνας μαθηματικός και φιλόσοφος, γεννήθηκε περίπου το 275 π.Χ. Ήταν ο πρώτος που υπολόγισε τη διάμετρο της Γης με ακρίβεια. Δυστυχώς σώζονται ελάχιστες από τις μελέτες του.

Ο διπλανός πίνακας είναι μία επινόηση του, για να ξεχωρίζει τους αριθμούς που έχουν μόνο 2 διαιρέτες από τους υπόλοιπους.

Για να τους ξεχωρίσεις κι εσύ, να διαγράψεις:

- τον αριθμό 1.
- τα πολλαπλάσια του 2, εκτός από το 2.
- τα πολλαπλάσια του 3, εκτός από το 3.
- τα πολλαπλάσια του 5, εκτός από το 5.
- τα πολλαπλάσια του 7, εκτός από το 7.
- Βάλε σε έναν κύκλο τους αριθμούς που απέμειναν.
- Πόσοι έμειναν; ....

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Από την αρχαιότητα ακόμη οι αριθμοί αποτελούσαν πρόκληση για μελέτη. Το 300 π.Χ. ο Ευκλείδης ήταν από τους πρώτους που μελέτησαν τους αριθμούς σε σχέση με τους διαιρέτες τους και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες.

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Ένας αριθμός, μεγαλύτερος από το 1, που έχει μόνο **δύο διαιρέτες** (το 1 και τον εαυτό του) λέγεται **πρώτος**.

Ένας αριθμός που έχει τουλάχιστον **τρεις διαιρέτες** λέγεται **σύνθετος**.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 2, έχει για διαιρέτες μόνο το 1 και το 2.

Ο αριθμός 4, έχει για διαιρέτες το 1, το 2 και το 4.

Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος (έχει μόνο **έναν διαιρέτη**, τον εαυτό του).

Εφαρμογή 1η

Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 101 έως 110 είναι πρώτοι αριθμοί.

Λύση

101 102 103 104 105 10 107 108 109 110

Πρώτα διαγράφω τους άρτιους αριθμούς (διαιρούνται με το 2). Μετά το 105 (που διαιρείται με το 3). Κανένας από τους υπόλοιπους αριθμούς δεν διαιρείται με το 5 σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας. Δοκιμάζω, όπως ο Ερατοσθένης, και με το 7 και διαπιστώνω ότι δεν διαιρούνται ούτε μ' αυτό. Πρέπει να δοκιμάσω όμως αν διαιρούνται με κάποιον από τους υπόλοιπους πρώτους αριθμούς μέχρι το 100.

Απάντηση: Πρώτοι είναι οι αριθμοί 101, 103, 107 και 109.
Σύνθετοι είναι οι αριθμοί 102, 104, 105, 106, 108 και 110.

Εφαρμογή 2η

Το Στ΄1 έχει 23 μαθητές και το Στ΄2 έχει 24. Ο γυμναστής θέλει να χωρίσει κάθε τμήμα σε ίσες ομάδες. Σε ποιο τμήμα θα δυσκολευτεί και γιατί; Στο άλλο τμήμα πόσοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί που μπορεί να κάνει;

Λύση- Απάντηση

Το Στ΄1 δεν μπορεί να χωριστεί σε ομάδες χωρίς να περισσεύει κανένα παιδί, γιατί το 23 δεν έχει άλλους διαιρέτες εκτός από το 1 και το 23 (είναι πρώτος αριθμός). Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να το «παράγουμε» παρά μόνο με τον πολλαπλασιασμό 1 • 23.

Το Στ΄2 μπορεί να χωριστεί με πολλούς τρόπους, γιατί το 24 έχει πολλούς διαιρέτες (είναι σύνθετος αριθμός).

Πιθανοί συνδυασμοί είναι:	12	ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(12 • 2 = 24)
	2	ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(2 • 12 = 24)
	3	ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(3 • 8 = 24)
	8	ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(8 • 3 = 24)
	4	ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(4 • 6 = 24)
	6	ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(6 • 4 = 24)
	24	ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(24 • 1 = 24)

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **πρώτος** και **σύνθετος αριθμός**.
Εξήγησέ τους με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός ζυγός αριθμός που είναι πρώτος.	❐	❐
Με το «κόσκινο του Ερατοσθένη» βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς.	❐	❐

Κεφάλαιο 15ο

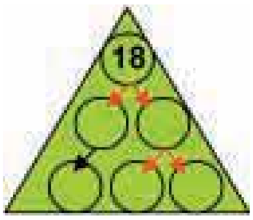
Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

Δέντρα με αριθμούς

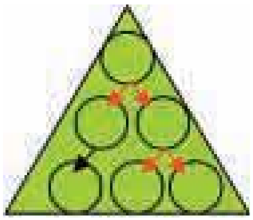
Αναλύω έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
Μαθαίνω τη διαδικασία ανάλυσης με δεντροδιάγραμμα και με διαδοχικές διαιρέσεις.

Δραστηριότητα 1η *«Δεντροδιαγράμματα»*

Τα παιδιά της Στ΄ τάξης αναρωτήθηκαν: «Μπορούμε οποιονδήποτε σύνθετο αριθμό να τον εκφράσουμε ως γινόμενο πρώτων αριθμών;» Ας πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό 18:



- Γράψε στο διπλανό «δέντρο» το 18 ως γινόμενο δύο παραγόντων :
- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες:

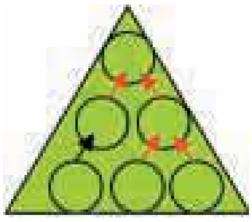


- Θα μπορούσες να ξεκινήσεις (πάλι από το 18) με άλλους παράγοντες;
- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες.
- Τι παρατηρείς για το τελικό γινόμενο στα δύο δέντρα;

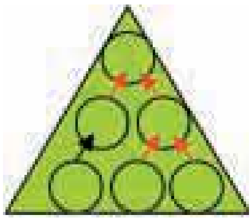
....

Δραστηριότητα 2η

Από την προηγούμενη δραστηριότητα τα παιδιά κατάλαβαν ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι το «κατασκευαστικό» υλικό για να φτιαχτούν όλοι οι σύνθετοι αριθμοί. Άρα κάθε σύνθετος αριθμός είναι φτιαγμένος από έναν μοναδικό συνδυασμό πρώτων αριθμών. Σκέφτηκαν να τους παρομοιάσουν με τα παιδικά τουβλάκια και να δοκιμάσουν τώρα να παράγουν δέντρα με αριθμούς ξεκινώντας από τα κάτω κλαδιά προς τα πάνω.



- Γράψε στα κάτω κλαδιά του διπλανού «δέντρου» ένα συνδυασμό από 3 πρώτους παράγοντες (ίδιους ή διαφορετικούς).
- Ανεβαίνοντας στο πιο πάνω «κλαδί» να κάνεις τον πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο παράγοντες και να μεταφέρεις τον τρίτο όπως είναι.
- Στο τελευταίο κλαδί να κάνεις και τον άλλο πολλαπλασιασμό.



- Δοκίμασε τώρα με άλλους πρώτους παράγοντες.
- Συνέχισε κάνοντας τον πρώτο πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο και μετάφερε τον τρίτο.
- Κάνε τον τελευταίο πολλαπλασιασμό. Η διαδικασία παραγωγής του αριθμού ολοκληρώθηκε.

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στο συμπέρασμα:

Γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ένας σύνθετος αριθμός μπορεί να εκφραστεί και ως γινόμενο πρώτων αριθμών **(γινόμενο πρώτων παραγόντων).**

Η σειρά των διαιρέσεων δεν παίζει κανένα ρόλο, γιατί κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μόνο κατά έναν τρόπο.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 10, μπορεί να εκφραστεί και ως $2 \cdot 5$.

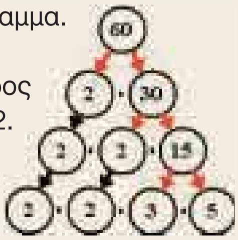
$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$

Για να αναλύσουμε έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, μπορούμε να εργαστούμε με δεντροδιάγραμμα ή διαδοχικές διαιρέσεις.

Εφαρμογή 1η

Να εκφράσετε τον αριθμό 60 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με δεντροδιάγραμμα.



Λύση

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 60. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Επομένως, γράφουμε το γινόμενο $2 \cdot 30$.

β. Από κάτω, αφού γράψουμε ξανά τον πρώτο παράγοντα (το 2), συνεχίζουμε αναλύοντας με τον ίδιο τρόπο το 30. Διαιρείται με το 2 και έτσι γράφουμε το γινόμενο $2 \cdot 15$.

γ. Γράφουμε ξανά τους πρώτους παράγοντες όπως είναι $(2 \cdot 2)$ και συνεχίζουμε αναλύοντας το 15. Δεν διαιρείται με το 2 και έτσι εξετάζουμε αν διαιρείται με το 3. Διαιρείται και έτσι γράφουμε το γινόμενο $3 \cdot 5$.
Η ανάλυση τελειώνει, γιατί όλοι οι παράγοντες είναι πρώτοι αριθμοί.

Απάντηση: Το 60 εκφράζεται ως $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Εφαρμογή 2η

Να εκφράσετε τον αριθμό 90 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με διαδοχικές διαιρέσεις.

Λύση

90	**2**
45	**3**
15	**3**
5	**5**
1	

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 90. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Έτσι τον διαιρούμε και γράφουμε από κάτω το πηλίκο, που είναι 45.

β. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για το 45. Διαιρούμε με το 3 και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 15.

γ. Διαιρούμε το 15 με το 3, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 5.

δ. Διαιρούμε με το 5, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 1.

Η ανάλυση τελειώνει, γιατί το τελευταίο πηλίκο είναι το 1.

Απάντηση: Ο αριθμός 90 εκφράζεται ως $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **ανάλυση σύνθετου αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**. Εξήγησέ τον με ένα δικά σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Όλοι οι σύνθετοι αριθμοί μπορούν να γραφούν ως γινόμενα των πρώτων παραγόντων 2 και 3.	❒	❒
Πρέπει να βάζουμε τους παράγοντες με μια συγκεκριμένη σειρά.	❒	❒
Είναι σωστή η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.	❒	❒

Κεφάλαιο 16ο

Πολλαπλάσια ενός αριθμού – Ε.Κ.Π.

Έχουμε πολλά κοινά μεταξύ μας

Βρίσκω πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών.
Βρίσκω τα κοινά πολλαπλάσια και εντοπίζω το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αριθμών.
Χρησιμοποιώ τις διαδοχικές διαιρέσεις των αριθμών για να βρω το Ε.Κ.Π.

Δραστηριότητα 1η

Συμπλήρωσε τα γινόμενα στον παρακάτω πίνακα:

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3											
4											
6											

- Τι είναι για το 3 οι αριθμοί στη γραμμή του; ....
- Υπάρχουν κοινοί αριθμοί στις τρεις γραμμές; .... Αν ναι, κύκλωσέ τους.
- Τι είναι οι αριθμοί που κύκλωσες για το 3 το 4 και το 6;

  ....

- Ποιος είναι ο μικρότερος; ....

Δραστηριότητα 2η

Στο αγροτικό ιατρείο του χωριού ο παιδίατρος έρχεται ημέρα Δευτέρα κάθε 2 εβδομάδες και η οφθαλμίατρος την ίδια μέρα, κάθε 3 εβδομάδες. Αν κάποια Δευτέρα βρέθηκαν μαζί στο ιατρείο πότε θα βρεθούν ξανά μαζί;

- Μετά την αρχική τους συνάντηση, σε πόσες εβδομάδες θα πάει ξανά ο παιδίατρος; ....
- Σε πόσες εβδομάδες θα πάει ξανά η οφθαλμίατρος; ....
- Αν αριθμήσουμε τις εβδομάδες μετά τη συνάντηση για να σημειώσουμε τις επισκέψεις των γιατρών, συνέχισε συμπληρώνοντας τον πίνακα: ....
- Ποιος είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί στην εβδομάδα που ψάχνουμε;............

Εβδομάδα *(μετά την α΄ συνάντηση)*	1η	2η	3η	4η	5η	6η
Παιδίατρος *(επίσκεψη ανά 2 εβδομάδες)*	–	✓				
Οφθαλμίατρος *(επίσκεψη ανά 3 εβδομάδες)*	–	–				

- Μπορείς να διακρίνεις από τον πίνακα ποια ιδιότητα έχει ο αριθμός της εβδομάδας κοινής επίσκεψης; Εξήγησε: ....

  ....

- Πότε θα είναι η 3η κοινή συνάντηση; ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού, Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών

Πολλαπλάσιο ενός φυσικού αριθμού λέγεται ο αριθμός που προκύπτει, όταν τον πολλαπλασιάσουμε με έναν άλλο φυσικό αριθμό.
Κάθε φυσικός αριθμός έχει άπειρα πολλαπλάσια.
Κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών λέγονται οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια όλων αυτών των φυσικών αριθμών.

Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια, εκτός από το 0, λέγεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.).**

Παραδείγματα

Πολλαπλάσια του 4 είναι οι αριθμοί:
0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ..., *άπειρο*
Πολλαπλάσια του 6 είναι οι αριθμοί:
0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ..., *άπειρο*
Κοινά πολλαπλάσια του 4 και του 6 (εκτός από το 0) είναι οι αριθμοί 12, 24, 36, ...

Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο του 4 και του 6 είναι το 12.

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών εξετάζουμε τον μεγαλύτερο από αυτούς. Αν αυτός δεν είναι το Ε.Κ.Π. τους, τον διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε κ.λπ., ώσπου να βρούμε το πολλαπλάσιό του που είναι πολλαπλάσιο και των άλλων αριθμών.

Ένας άλλος τρόπος είναι να τους αναλύσουμε ταυτόχρονα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων. Το Ε.Κ.Π. τους είναι το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων. Ο τρόπος αυτός φαίνεται αναλυτικά παρακάτω (στην 1η εφαρμογή).

Εφαρμογή 1η

Βρίσκω το Ε.Κ.Π. των αριθμών 30, 36 και 45 με διαδοχικές διαιρέσεις.

Λύση

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός ο οποίος διαιρεί τουλάχιστον τον έναν από τους τρεις αριθμούς. Είναι ο αριθμός 2, ο οποίος διαιρεί το 30 και το 36. Διαιρούμε αυτούς τους αριθμούς, γράφουμε τα πηλίκα τους από κάτω και γράφουμε το 45 όπως είναι.
β. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία, αναζητώντας πάντα το μικρότερο πρώτο αριθμό που να διαιρεί τουλάχιστον τον έναν αριθμό. Όσους δεν διαιρούνται τους ξαναγράφουμε από κάτω, μέχρι να γίνουν όλα τα πηλίκα ίσα με το 1.

30	**36**	**45**	**2**
15	**18**	**45**	**2**
15	**9**	**45**	**3**
5	**3**	**15**	**3**
5	**1**	**5**	**5**
1		**1**	

Απάντηση: Το Ε.Κ.Π. των αριθμών 30, 36 και 45 είναι το 2 • 2 • 3 • 3 • 5 = ...

Εφαρμογή 2η

Οι μαθητές μιας τάξης χωρίζονται σε ομάδες των 5 ή των 6 παιδιών χωρίς να περισσεύει κανένας. Πόσοι μπορεί να είναι;

Λύση

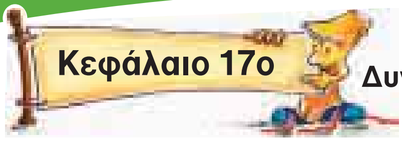
Ο αριθμός των μαθητών πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο του 5 και του 6. Για να βρω το Ε.Κ.Π. του 5 και του 6, σκέφτομαι τα πολλαπλάσια του 6 μέχρι να βρω το πρώτο κοινό τους πολλαπλάσιο: 0, 6, 12, 18, 24, **30**.
(Υπάρχουν πολλά κοινά πολλαπλάσια, αλλά οι μαθητές δεν μπορεί να είναι περισσότεροι από 30.)

Απάντηση: Οι μαθητές είναι 30.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **πολλαπλάσιο** και **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** (**Ε.Κ.Π.**).
Εξήγησε τον καθένα με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
➼ *Οι αριθμοί 0 , 9, 18, 27 και 36 είναι κοινά πολλαπλάσια του 3 και του 9.*	❒	❒
➼ *Το Ε.Κ.Π. (4, 40) είναι το 40.*	❒	❒
➼ *Το Ε.Κ.Π. δύο αριθμών μπορεί να είναι αριθμός μικρότερος από τους δύο.*	❒	❒



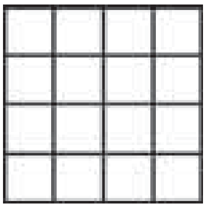
Δυνάμεις

Πολλοί μαζί είμαστε πιο δυνατοί

Γνωρίζω την έννοια και τον συμβολισμό της δύναμης ενός αριθμού.
Διαβάζω και γράφω δυνάμεις.
Γράφω το γινόμενο ίδιων παραγόντων με δύναμη και αντίστροφα.
Υπολογίζω τις δυνάμεις ενός αριθμού.

Δραστηριότητα 1η

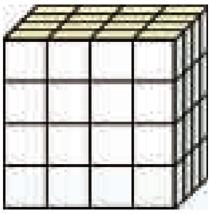
Ξέρουμε ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μια σύντομη πρόσθεση με ίδιους προσθετέους.



- Υπολόγισε με σύντομο τρόπο πόσα μικρά τετράγωνα υπάρχουν στο διπλανό σχήμα.
- Γράψε την πράξη που έκανες:

  ....

- Υπολόγισε το πλήθος των μικρών κύβων στην παρακάτω κατασκευή: ....



- Τι παρατηρείς για τους παράγοντες σε καθεμία από τις προηγούμενες ισότητες; ....

Δραστηριότητα 2η

Από τα αρχαία ακόμη χρόνια οι άνθρωποι έδωσαν ιδιαίτερη προσοχή στους πολλαπλασιασμούς στους οποίους όλοι οι παράγοντες ήταν ίδιοι. Στον Πάπυρο του Αχμές (αρχαίο μαθηματικό αιγυπτιακό χειρόγραφο που ο Ριντ μετέφερε στη Βρετανία) διαβάζουμε το παρακάτω πρόβλημα:

Υπάρχουν εφτά σπίτια. Σε κάθε σπίτι ζουν εφτά γάτες. Κάθε γάτα έφαγε εφτά ποντίκια. Κάθε ποντίκι, αν ζούσε, θα έχει φάει εφτά στάχυα. Κάθε στάχυ που φυτεύεται παράγει εφτά κούπες σιτάρι. Πόσο περισσότερες κούπες σιτάρι θα παραχθούν χάρη στις γάτες κατά την επόμενη σοδειά ;

- Γράψτε τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε για να λύσετε το «πρόβλημα»:

  ....

  ....

  ....

- Πιστεύετε ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δάσκαλοι έβαλαν το πρόβλημα αυτό μόνο για να βρεθεί η ποσότητα του σιταριού; ....

  ....

  ....

Πολλές φορές συναντάμε γινόμενα στα οποία όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι. Αυτά τα γινόμενα είναι δυνατό να εκφραστούν με πιο σύντομο τρόπο.

Δύναμη φυσικού αριθμού

Ένα γινόμενο με ίδιους παράγοντες μπορεί να γραφεί ως **δύναμη**.
Η δύναμη αποτελείται από δύο αριθμούς: τη **βάση** που είναι ο αριθμός που χρησιμοποιείται ως παράγοντας στο γινόμενο και τον **εκθέτη** που δείχνει πόσες φορές ο αριθμός της βάσης χρησιμοποιείται ως παράγοντας.

Παραδείγματα

Παράγοντες γινομένου - δύναμη
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$\mathbf{2^5}$
2: βάση
5: εκθέτης

Ο εκθέτης γράφεται με μικρότερο μέγεθος, πάνω και δεξιά από τη βάση. Για παράδειγμα, η δύναμη με βάση το 2 και εκθέτη το 5 γράφεται $\mathbf{2^5}$ και διαβάζεται: **2 στην πέμπτη (δύναμη).**

Η δύναμη με εκθέτη το 2 διαβάζεται στη δεύτερη ή **στο τετράγωνο** (π.χ. 5^2 : 5 στη δεύτερη ή 5 στο τετράγωνο).
Η δύναμη με εκθέτη το 3 διαβάζεται στην τρίτη ή **στον κύβο** (π.χ. 5^3 : 5 στην τρίτη ή 5 στον κύβο).

$5^2 = 5 \cdot 5$ (είναι το εμβαδό **τετραγώνου** με πλευρά 5)
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ (είναι ο όγκος **κύβου** με ακμή 5)

Εφαρμογή 1η

Να βρείτε το γινόμενο πρώτων παραγόντων του αριθμού 243. Μπορείτε να γράψετε το γινόμενο αυτό με συντομότερο τρόπο;

Λύση

Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός ο οποίος διαιρεί τον αριθμό 243. Βρίσκουμε ότι είναι ο αριθμός 3 και αρχίζουμε τη διαδικασία παραγοντοποίησης.

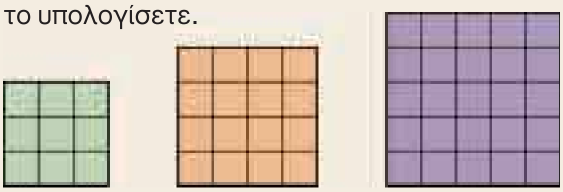
243	**3**
81	**3**
27	**3**
9	**3**
3	**3**
1	

Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, βρίσκουμε το γινόμενο πρώτων παραγόντων $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Διαπιστώνουμε ότι είναι ένα γινόμενο που αποτελείται από ίδιους παράγοντες. Άρα μπορεί να εκφραστεί με δύναμη.

Απάντηση: Ο αριθμός 243 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ και με συντομότερο τρόπο είναι: 3^5

Εφαρμογή 2η

Να γράψετε το γινόμενο για τον υπολογισμό του εμβαδού για καθένα από τα παρακάτω τετράγωνα με τη μορφή δύναμης και να το υπολογίσετε.



Λύση - Απάντηση:

α) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ τ.εκ., β) $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ τ.εκ., γ) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ τ.εκ.

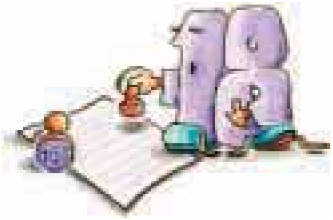
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **δύναμη ενός αριθμού, βάση** και **εκθέτης**. Εξήγησέ τους με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Η ισότητα $6^3 = 6 \cdot 3$ είναι σωστή.	❒	❒
Η ισότητα $4^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ είναι σωστή.	❒	❒
Η ισότητα $4^2 = 16$ είναι σωστή.	❒	❒

Κεφάλαιο 18ο

Δυνάμεις του 10



Συσκευασία: «Δέκα σε ένα»

Γνωρίζω τις δυνάμεις του 10.
Γράφω τους μεγάλους αριθμούς χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις του 10.

Δραστηριότητα 1η

Όπως ξέρουμε, τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με τον εαυτό του, μπορούμε να τον εκφράσουμε και με τη μορφή δύναμης.

- Να εκφράσεις το γινόμενο 10 • 10 με δύναμη και να το υπολογίσεις..
- Έχοντας εκφράσει την εκατοντάδα με δύναμη, πώς μπορούμε να εκφράσουμε γρήγορα τις 2, 3, 4, εκατοντάδες; ....
- Να εκφράσεις το 1000 με δύναμη του 10. ....
- Πώς μπορούμε τώρα να εκφράσουμε τις 2, 3, 4, ... χιλιάδες με δύναμη; ....

  ....
- Συμπλήρωσε τον πίνακα με τις δυνάμεις του 10.
- Βρες τον κανόνα για να υπολογίζεις από τη δύναμη το γινόμενο, χωρίς να κάνεις τους πολλαπλασιασμούς.

10^2	10^3	10^4	10^5
10 • 10			
100			

Δραστηριότητα 2η

Ο Άρης είναι περίπου 1.000.000.000.000 μέτρα μακριά από τη Γη! Ο αριθμός αυτός μας δίνει την «εντύπωση» μιας μεγάλης απόστασης, αλλά σε σχέση με τι; Το σχολείο απέχει 100 μέτρα από το σπίτι! Αν μας έλεγαν ότι το μήκος του γαλαξία μας είναι 1.000.000.000.000.000.000.000 μέτρα, ξαφνικά ο Άρης θα έμοιαζε σαν ένας πολύ κοντινός γείτονας (που, για τις αστρονομικές αποστάσεις, είναι πραγματικά)!

Διαβάζοντας το παραπάνω κείμενο, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση, η σύγκριση, ακόμα και η ανάγνωση τεράστιων αριθμών είναι δύσκολη υπόθεση. Για να μπορούμε να τους διαβάζουμε πιο εύκολα, να βλέπουμε με μια ματιά τη «μεγαλοσύνη» τους και να κάνουμε πράξεις με αυτούς, τους εκφράζουμε με τις δυνάμεις του 10. Έτσι:

Το μήκος του γαλαξία μας είναι: .... μέτρα.
Η απόσταση από τη Γη ως τον Άρη είναι: .... μέτρα.
Το σπίτι απέχει από το σχολείο: .... μέτρα.

Οι δυνάμεις του 10 μας επιτρέπουν να εκφράσουμε τη σύγκριση μεγεθών, που διαφορετικά θα ήταν δύσκολο να συγκριθούν.

- Μπορείτε τώρα να απαντήσετε, συγκρίνοντας τους αριθμούς ως δυνάμεις του 10, στην ερώτηση: «Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το μήκος του γαλαξία μας από την απόσταση Γη - Άρη;».

  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι, χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις του 10, μπορούμε να γράψουμε με σύντομο τρόπο πολύ μεγάλους αριθμούς.

Δυνάμεις του 10

Κάθε δύναμη του 10 είναι ίση με τον αριθμό που σχηματίζεται από το ψηφίο 1 και τόσα μηδενικά όσες μονάδες έχει ο εκθέτης.
Μπορούμε να γράψουμε τους αριθμούς 10, 100, 1000, ... ως δυνάμεις με βάση το 10 βάζοντας ως εκθέτη τον αριθμό που δείχνει πόσα μηδενικά έχουν.

Παραδείγματα

$10^2 = 100$
$10^4 = 10.000$
$1.000 = 10^3$
$1.000.000 = 10^6$

Για να γράψουμε έναν πολυψήφιο αριθμό, με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10 κάνουμε τα εξής:

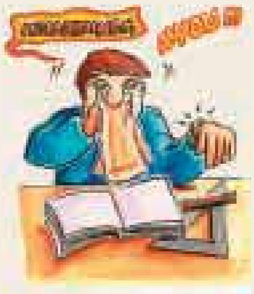
α. Τον μετατρέπουμε σε γινόμενο με το 10, 100, 1000, ... ανάλογα με τον αριθμό των 0 που υπάρχουν στον αριθμό.
β. Μετατρέπουμε το 10, 100, 1000, ... σε δύναμη του 10
γ. Ο πολυψήφιος αριθμός έχει τώρα τη μορφή γινομένου του οποίου ο δεύτερος παράγοντας είναι δύναμη του 10.

Οι αστροφυσικοί έχουν ανακαλύψει στο διάστημα περίπου 500.000.000 γαλαξίες.
α. Αυτό γράφεται και ως: 5 • 100.000.000
β. $100.000.000 = 10^8$
γ. $500.000.000 = 5 \cdot 10^8$

Εφαρμογή 1η

Οι επιστήμονες υπολογίζουν ότι, όταν ο ιός της γρίπης προσβάλλει έναν άνθρωπο, αν βρει ικανοποιητικές συνθήκες, μέσα σε 12 ώρες έχει δημιουργήσει αποικία 1.500.000.000 μονάδων. Πόσες μονάδες του ιού θα υπάρχουν στον άνθρωπο, αν αρχίσει την αντιβίωση 2 μέρες, αφού προσβληθεί από τον ιό; Να εκφράσετε τον αριθμό με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10.

Λύση:



Ξέρουμε ότι 2 μέρες είναι 4 δωδεκάωρα. Αφού ο ιός πολλαπλασιάζεται περίπου κατά 1.500.000.000 μονάδες κάθε 12 ώρες, έπειτα από 2 μέρες θα υπάρχουν 1.500.000.000 • 4 = 6.000.000.000 μονάδες.
Μετατρέπουμε τον αριθμό στο γινόμενο 6 • 10.000.000.000
Μετατρέπουμε το 10.000.000.000 στη δύναμη $10^{....}$. Ο αριθμός γράφεται τώρα $6 \cdot 10^{....}$.
Απάντηση: Σε 2 μέρες θα υπάρχουν περίπου $6 \cdot 10^{....}$ μονάδες του ιού.

Εφαρμογή 2η

Ο πληθυσμός της Γης είναι περίπου $7 \cdot 10^9$ άνθρωποι. Γράψε τον αριθμό αυτό στην κανονική μορφή.

Λύση
Η δύναμη 10^9 είναι ίση με το 1.000.000.000.
Άρα το γινόμενο $7 \cdot 10^9 = 7 \cdot 1.000.000.000 = 7.000.000.000$.
Απάντηση: Ο πληθυσμός της Γης είναι περίπου 7.000.000.000 άνθρωποι.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **δυνάμεις του 10** και **έκφραση αριθμού με δύναμη του 10**. Εξήγησέ τους με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Σε μια δύναμη του 10 εκθέτης είναι πάντα το 10.	❐	❐
Οι αριθμοί εκφράζονται με δύναμη του 10 μόνο για μεγάλες αποστάσεις.	❐	❐
Η ισότητα $10^1 = 10$ είναι σωστή.	❐	❐

Κεφάλαιο 19ο

Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα

Τι πλάσμα είναι αυτό το … κλάσμα;

Μελετώ την έννοια του κλάσματος ως μέρος του όλου.
Συγκρίνω το κλάσμα με την ακέραιη μονάδα.
Διαπιστώνω ότι υπάρχουν κάποια κλάσματα που μετατρέπονται σε μεικτούς αριθμούς και μαθαίνω πώς να μετατρέπω τη μια μορφή στην άλλη.

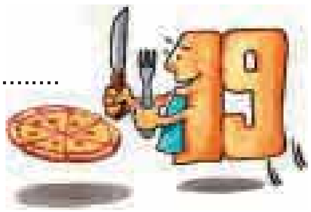
Μια μεγάλη επινόηση του ανθρώπου στην αριθμητική ήταν ένας νέος αριθμός, το κλάσμα. Το χρησιμοποιούμε συχνά στην καθημερινή μας ζωή για να δηλώσουμε το μέρος ενός πράγματος.

Εκφράστε με κλάσμα: α) 2 ημέρες ενός έτους ...., β) 1 λεπτό της ώρας ...., γ) 1 λεπτό του ΕΥΡΩ ....,

δ) 6 ώρες της ημέρας ...., ε) 15 γραμμάρια του κιλού ....

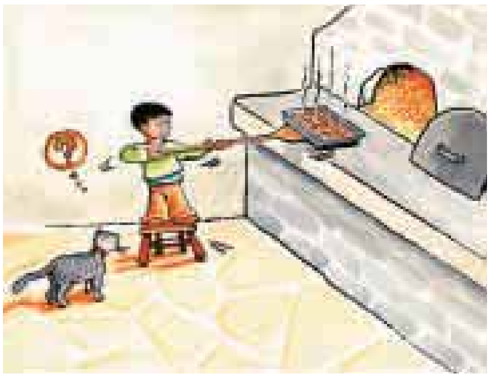
Δραστηριότητα 1η

Οι φίλοι μου κι εγώ λατρεύουμε την πίτσα. Αυτό είναι πολύ καλό, γιατί ξέρουμε πάντα τι φαγητό να παραγγείλουμε. Υπάρχει όμως ένα μικρό πρόβλημα. Θέλουμε να είμαστε δίκαιοι και να μοιραζόμαστε τις πίτσες εξίσου, ωστόσο δεν ξέρουμε πάντα πώς να το κάνουμε!
Μπορείτε να μας βοηθήσετε με τα κλάσματα;



- Αν είχαμε μια πίτσα για 2 άτομα, πόσο μέρος πίτσας θα έτρωγε ο καθένας; ....
- Αν ήμασταν 3 άτομα, πόσο μέρος πίτσας θα έτρωγε ο καθένας; ....
- Αν εμείς οι 3 φίλοι είμαστε πολύ πεινασμένοι και παραγγείλουμε δύο πίτσες, πόσο μέρος πίτσας θα φάει ο καθένας συνολικά; ....

Δραστηριότητα 2η



Χρειάζεται $\frac{1}{4}$ της ώρας για να ψηθεί μία πίτσα στο φούρνο μας.

- Αν ψήνουμε τη μια πίτσα μετά την άλλη και ψήσουμε 4 πίτσες, πόσα τέταρτα της ώρας θα χρειαστούμε;
- Γράψε την απάντησή σου με κλάσμα: ....
- Τι παρατηρείς για τους όρους του κλάσματος; ....
- Γράψε τώρα το χρόνο ψησίματος σε ώρες: ....
- Αν έχουμε να ψήσουμε 5 πίτσες, πόσα τέταρτα της ώρας θα χρειαστούμε;
- Γράψε την απάντησή σου με κλάσμα: ....
- Τι παρατηρείς για τους όρους αυτού του κλάσματος; ....
- Γράψε τώρα το χρόνο ψησίματος σε ώρες: ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

	Παραδείγματα
Κλάσμα Ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός «όλου» ονομάζεται **κλάσμα.** Το κλάσμα σχηματίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς, τον αριθμητή και τον παρονομαστή, που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή: $\frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$. Το κλάσμα με αριθμητή το 1 λέγεται **κλασματική μονάδα.**	Το $\frac{3}{5}$ είναι το κλάσμα που δηλώνει το σκιασμένο μέρος του παρακάτω ορθογωνίου.
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1.	$\frac{3}{4} < 1$ και $\frac{10}{12} < 1$
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με το 1.	$\frac{4}{4} = 1$ και $\frac{12}{12} = 1$
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χωρίσουμε τις ακέραιες μονάδες και να μετατρέψουμε το κλάσμα σε **μεικτό αριθμό.**	$\frac{5}{4} > 1$ και $\frac{17}{12} > 1$ $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ και $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

Εφαρμογή 1η

Σε ένα πάρτι υπάρχει γλυκό μηλόπιτα σε ταψιά. Κάθε μερίδα γλυκού είναι το $\frac{1}{12}$ του ταψιού. Η μηλόπιτα προσφέρθηκε σε 31 άτομα. Πόσα ταψιά μηλόπιτας καταναλώθηκαν;

Λύση

Ξέρουμε ότι οι μερίδες που έφαγαν όλοι είναι 31 (*αν ο καθένας έφαγε μόνο μία μερίδα*). Αφού η μία μερίδα είναι το $\frac{1}{12}$ του ταψιού, τότε οι μερίδες που καταναλώθηκαν είναι τα $\frac{31}{12}$.

Αφού το ένα ταψί είναι $\frac{12}{12}$, τα $\frac{31}{12}$ είναι $\frac{12}{12} + \frac{12}{12} + \frac{7}{12}$, δηλαδή $2\frac{7}{12}$.

Απάντηση: Καταναλώθηκαν $2\frac{7}{12}$ ταψιά μηλόπιτας.

Εφαρμογή 2η

Να μετατρέψετε το μεικτό αριθμό $5\frac{5}{6}$ σε κλάσμα.

Λύση

Το κλάσμα που υπάρχει στο μεικτό αριθμό δηλώνει ότι κάθε ακέραιη μονάδα έχει χωριστεί σε έκτα, είναι δηλαδή ίση με $\frac{6}{6}$. Άρα ο αριθμός $5\frac{5}{6}$ μπορεί να γραφεί $\frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{35}{6}$ ή αλλιώς

$____ + \frac{5}{6} = \frac{35}{6}$.

Απάντηση: Ο μεικτός αριθμός $5\frac{5}{6}$ μετατρέπεται στο κλάσμα $\frac{35}{6}$.

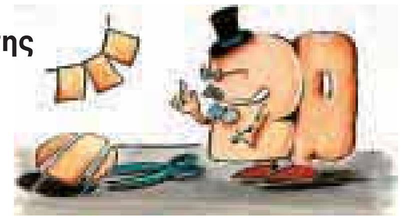
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **κλάσμα, αριθμητής, παρονομαστής, κλασματική μονάδα, κλάσμα μικρότερο, ίσο ή μεγαλύτερο από το 1** και **μεικτός αριθμός**. Εξήγησε καθέναν από τους όρους αυτούς με ένα παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Το κλάσμα εκφράζει το μέρος ενός όλου που έχει χωριστεί σε ίσα μέρη.	❒	❒
Ο αριθμητής δεν μπορεί ποτέ να είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή.	❒	❒
Ο μεικτός αριθμός μετατρέπεται σε κλάσμα μικρότερο απ' το 1.	❒	❒

Κεφάλαιο 20ό

Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης



Ποιος θα με βοηθήσει στο μοίρασμα;

Διαπιστώνω ότι το κλάσμα είναι το πηλίκο μιας διαίρεσης.
Μαθαίνω να μετατρέπω ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και αντίστροφα.
Σημειώνω τη θέση του κλάσματος στην αριθμογραμμή από τη δεκαδική του αξία.

Δραστηριότητα 1η

Ένας πατέρας αγόρασε ένα κουτί με 10 σοκολάτες για να τις μοιράσει στα τρία παιδιά του. Μπορείτε να τους βοηθήσετε με τη μοιρασιά;

- Αν το κουτί είχε 12 σοκολάτες, πόσο θα έπαιρνε κάθε παιδί;
  ....
- Γράψε την πράξη που έκανες: ....
- Το κουτί έχει 10 σοκολάτες. Πώς μπορείς να υπολογίσεις πόσο θα πάρει κάθε παιδί; ....
  ....
- Κάνοντας την πράξη, μπορείς να υπολογίσεις ακριβώς; ....
- Αν τα 3 παιδιά είχαν να μοιραστούν μόνο μία σοκολάτα, πόσο μέρος της θα έπαιρνε το καθένα;
  ....

- Αν λοιπόν χωρίσουν και τις 10 σοκολάτες κατά τον ίδιο τρόπο, πόσα ίδια μέρη θα πάρει κάθε παιδί;
  ....
- Τι κατάφερες να υπολογίσεις με τον τρόπο αυτό; ....

Δραστηριότητα 2η

Στην προηγούμενη δραστηριότητα το πηλίκο της διαίρεσης 10 : 3 το εκφράσαμε με το κλάσμα $\frac{10}{3}$. Αν αποφασίσουμε να κάνουμε τη διαίρεση, θα είναι 10 : 3 = 3,333...

- Πώς μπορούμε να βρούμε σε ποιο σημείο στην αριθμογραμμή αντιστοιχεί ο αριθμός που εκφράζεται με ένα κλάσμα; ....
- Τοποθετήστε πάνω από την αριθμογραμμή τα παρακάτω κλάσματα, αφού κάνετε την πράξη που χρειάζεται για να βρείτε ποιον αριθμό εκφράζει το καθένα:
  (Μπορούμε να τα τοποθετήσουμε χωρίς να κάνουμε την πράξη;) ....

Α. $\frac{45}{90}$ Β. $\frac{2}{5}$ Γ. $\frac{9}{12}$ Δ. $\frac{7}{10}$ Ε. $\frac{4}{16}$ Ζ. $\frac{33}{30}$

- Τι πρέπει να κάνουμε για να τοποθετήσουμε στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{1}{3}$ (ή το κλάσμα $\frac{10}{3}$);
  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι χάρη στα κλάσματα μπορούμε να εκφράσουμε το πηλίκο κάθε διαίρεσης φυσικών αριθμών με ακρίβεια:

	Παραδείγματα
Κλάσμα Το κλάσμα εκφράζει το ακριβές **πηλίκο** μιας διαίρεσης: της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του.	Το $\frac{3}{7}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης 3 : 7
Αν κάνουμε τη διαίρεση αυτή, μπορούμε **να μετατρέψουμε το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό** (ή σε φυσικό, αν η διαίρεση είναι τέλεια). Αν η διαίρεση δεν μας δίνει ακριβές πηλίκο, σταματάμε εκεί που θέλουμε και έχουμε πηλίκο με προσέγγιση στα δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά, ...	3 : 7 = 0,4285714... Το πηλίκο της διαίρεσης 3 : 7 είναι 0,42 με προσέγγιση στα εκατοστά ή 0,428 με προσέγγιση στα χιλιοστά.
Οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται και ως κλάσματα.	Το 0,1 γράφεται ως $\frac{1}{10}$.

Εφαρμογή 1η **Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό**

Να μετατρέψετε τα κλάσματα $\frac{7}{28}$ και $\frac{7}{140}$ σε δεκαδικούς αριθμούς και να τους προσθέσετε.

Λύση - Απάντηση:

Για να μετατρέψουμε τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς θα κάνουμε τις διαιρέσεις:

```
 70 | 28              700 | 140
140 | 0,25     και      0 | 0,05    Τώρα θα προσθέσουμε 0,25 + 0,05 = ..........
 00 |
```

Εφαρμογή 2η **Μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα**

- Να κάνετε τη διαίρεση ανάμεσα στους όρους των κλασμάτων $\frac{6}{10}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{8}{1000}$, και $\frac{19}{10}$.
- Να διατυπώσετε τώρα τον κανόνα μετατροπής των δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα.
- Μετά, γράψτε ως κλάσματα τους δεκαδικούς αριθμούς: 0,6   0,09   0,005   3,042

Λύση - Απάντηση

- Όπως γνωρίζουμε, κάθε δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα. Κάνοντας τη διαίρεση ανάμεσα στους όρους των κλασμάτων διαπιστώνουμε ότι:

  $\frac{6}{10} = 0,6$ $\frac{75}{100} = 0,75$ $\frac{8}{1000} = 0,008$ $\frac{19}{10} = 1,9$

- Άρα: **οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται ως κλάσματα με παρονομαστή το 10, το 100, το 1000, ... ανάλογα με τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που έχουν.**
- 0,6 = ―――   0,09 = ―――   0,005 = ―――   3,042 = ―――

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το **κλάσμα ως πηλίκο** της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του και τη **μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό** και αντίστροφα. Πες ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Στο κλάσμα ο αριθμητής είναι ο διαιρετέος και ο παρονομαστής ο διαιρέτης.	❒	❒
Η διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή είναι πάντα τέλεια.	❒	❒
Η ισότητα 1 : 3 = $\frac{3}{1}$ *είναι σωστή.*	❒	❒

Κεφάλαιο 21ο

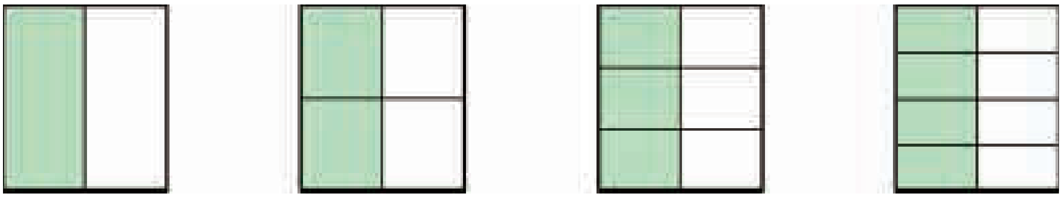
Ισοδύναμα κλάσματα

Μπορώ να λέω το ίδιο και με άλλα λόγια!

Αναγνωρίζω δύο ισοδύναμα κλάσματα.
Δημιουργώ ισοδύναμα κλάσματα.
Απλοποιώ κλάσματα, ώστε να γίνουν ανάγωγα.

Δραστηριότητα 1η

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε το σχέδιο ενός πάρκου που χωρίστηκε, για να καλυφθεί ένα μέρος του με χόρτο, ενώ στο υπόλοιπο θα τοποθετηθούν τα παιχνίδια.



Α .... *Β* .... *Γ* .... *Δ* ....

- Γράψε, κάτω από κάθε τετράγωνο, το κλάσμα που περιγράφει το πράσινο μέρος του.
- Πόσο μέρος του πάρκου θα καλυφθεί με χόρτο σε κάθε περίπτωση; ....
- Σύγκρινε τα κλάσματα μεταξύ τους με τη βοήθεια των σχημάτων.

  Τι παρατηρείς; ....
- Σύγκρινε το πρώτο κλάσμα με καθένα από τα υπόλοιπα.

  Τι παρατηρείς για τη σχέση ανάμεσα στους όρους τους; ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

Ο Χρήστος και ο Φοίβος είχαν από 12 €. Όταν συναντήθηκαν, ο Χρήστος είπε ότι ξόδεψε τα $\frac{9}{12}$ των χρημάτων του και ο Φοίβος είπε ότι ξόδεψε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων του.

- Ποιος ξόδεψε περισσότερα; ....
- Τι παρατηρείς για τους όρους των δύο κλασμάτων; ....
- Μπορείς να σχηματίσεις ένα νέο κλάσμα, που να εκφράζει το ίδιο μέρος του όλου; ....

  ....
- Με ποιο κλάσμα θα διάλεγες να εκφραστείς εσύ; Γιατί; ....

  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι είναι δυνατό δύο κλάσματα να έχουν διαφορετικούς όρους, αλλά να εκφράζουν την ίδια ποσότητα.

Ισοδύναμα κλάσματα	Παραδείγματα
Δύο κλάσματα λέγονται **ισοδύναμα** ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος του όλου. Αν πολλαπλασιάσουμε «χιαστί» τους όρους δύο ισοδύναμων κλασμάτων, τα δύο γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα μεταξύ τους. (Με τον τρόπο αυτό ελέγχουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα.)	Τα κλάσματα $\frac{9}{12}$ και $\frac{3}{4}$ είναι ισοδύναμα, δηλαδή $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ επειδή $9 \cdot 4 = 3 \cdot 12$
Αν **πολλαπλασιάσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, προκύπτει **ισοδύναμο** με το αρχικό κλάσμα.	$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$
Αν **διαιρέσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, προκύπτει **ισοδύναμο** κλάσμα. Αυτή η τεχνική λέγεται **απλοποίηση** του κλάσματος.	$\frac{7}{28} = \frac{7 \cdot 7}{28 \cdot 7} = \frac{1}{4}$
Αν ένα κλάσμα δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει αριθμός, εκτός από το 1, που να είναι κοινός διαιρέτης του αριθμητή και του παρονομαστή), το κλάσμα λέγεται **ανάγωγο**.	Το κλάσμα $\frac{4}{9}$ είναι ανάγωγο. (Δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης του 4 και του 9)

Εφαρμογή ***Δημιουργώ ισοδύναμα κλάσματα***

Να εκφράσετε με ισοδύναμα κλάσματα τι μέρος του μήνα είναι οι 6 μέρες. Ποιο κλάσμα από όσα δημιουργήσατε είναι ανάγωγο;

Λύση:

Το ένα κλάσμα είναι το $\frac{6}{30}$, που δηλώνει ακριβώς το μέρος του όλου.

Μπορώ να απλοποιήσω με το 3 για να γίνει το κλάσμα δεκαδικό: $\frac{6:3}{30:3} = \frac{\ \ }{\ \ }$

και να πολλαπλασιάσω κατόπιν με το δέκα: $\frac{2 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{\ \ }{\ \ }$ ή να απλοποιήσω το αρχικό κλάσμα

με το έξι: $\frac{6:6}{30:6} = \frac{\ \ }{\ \ }$ για να γίνει ανάγωγο.

Απάντηση: Οι 6 μέρες είναι τα ___ , ή ___ , ή τα ___ , ή αλλιώς το ___ του μήνα.

Ανάγωγο κλάσμα είναι το ___ .

*Αυτά είναι **όλα** τα ισοδύναμα κλάσματα που μπορούμε να δημιουργήσουμε; Συζητήστε το.*

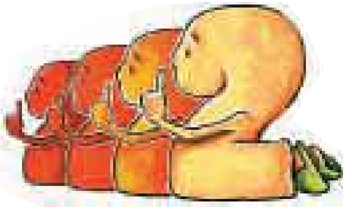
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

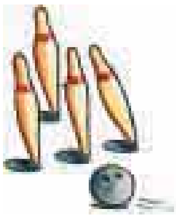
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **ισοδύναμα κλάσματα,** και **ανάγωγα κλάσματα**. Εξήγησε τη σημασία τους με ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Στη μέθοδο «χιαστί» πολλαπλασιάζω τους αριθμητές των κλασμάτων μεταξύ τους.	❐	❐
Ένα κλάσμα έχει άπειρα ισοδύναμα με αυτό κλάσματα.	❐	❐
Η διαίρεση των όρων του κλάσματος με το Μ.Κ.Δ. τους, οδηγεί σε ανάγωγο κλάσμα.	❐	❐

Κεφάλαιο 22ο

Σύγκριση – Διάταξη κλασμάτων





Πώς θα μπούμε στη σειρά;

Συγκρίνω ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα.
Διατάσσω τα κλάσματα κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.
Τοποθετώ τα κλάσματα στην αριθμογραμμή.
Μετατρέπω ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα.

Δραστηριότητα 1η

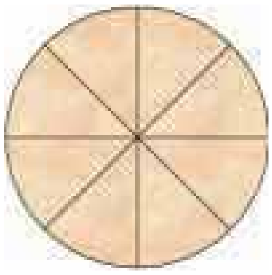
Πέντε φίλοι παρήγγειλαν τις δύο ίδιες πίτσες που φαίνονται στο σχήμα. Η μία πίτσα (α) ήταν χωρισμένη σε 8 κομμάτια και η άλλη (β) σε 6 κομμάτια.

- Από την πρώτη πίτσα έφαγαν: ο Βασίλης, ο Γιώργος και η Μαργαρίτα τα $\frac{4}{8}$, τα $\frac{3}{8}$ και το $\frac{1}{8}$ αντίστοιχα. Να συγκρίνεις τα μερίδιά τους και να τα γράψεις κατά αύξουσα σειρά χρησιμοποιώντας το σύμβολο < ανάμεσά τους.

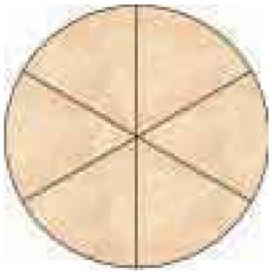
  ....

- Ο Γιώργος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ από την πρώτη πίτσα και ο Σωτήρης τα $\frac{3}{6}$ από τη δεύτερη. Ποιος έφαγε περισσότερο;
- Αν συγκρίνουμε τα μερίδια του Γιώργου, ο οποίος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ από την πρώτη πίτσα και του Λευτέρη ο οποίος έφαγε τα $\frac{2}{6}$ από τη δεύτερη, μπορούμε εύκολα να βρούμε ποιο είναι το μεγαλύτερο;
- Τι μπορούμε να κάνουμε για να τα συγκρίνουμε; ....

  ....



(α)

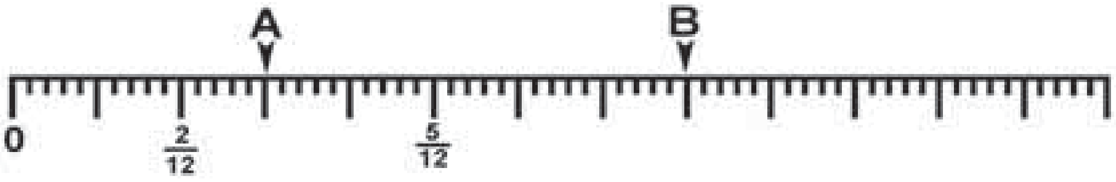


(β)

Δραστηριότητα 2η

- Αφού πρώτα διατάξεις τα κλάσματα $\frac{3}{12}, \frac{8}{12}, \frac{13}{12}, \frac{1}{12}$ και $\frac{11}{12}$ κατά αύξουσα σειρά, τοποθέτησε αυτά που αντιστοιχούν στα σημεία Α και Β στην παρακάτω αριθμογραμμή: ....

  ....



- Ποια διαδικασία μας επιτρέπει να βρούμε ποιο κλάσμα παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο άλλα;

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε τα κλάσματα και να τα διατάξουμε κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.

Σύγκριση κλασμάτων

Ανάμεσα σε δύο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.

Για να **συγκρίνουμε ετερώνυμα** κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.
Ειδικά για τα ετερώνυμα κλάσματα που έχουν τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή.

Τα ετερώνυμα κλάσματα μπορούν να μετατραπούν σε ισοδύναμά τους ομώνυμα, αν πολλαπλασιαστούν οι όροι τους με τον κατάλληλο αριθμό.

Παραδείγματα

$\frac{9}{24} > \frac{6}{24}$

$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ $\quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ $\quad \frac{8}{12} < \frac{9}{12}$

$\frac{2}{15} > \frac{2}{18}$

$\frac{3}{5}, \frac{1}{2}$ Ε.Κ.Π. (5,2) = 10 $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}, \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$

Εφαρμογή 1η ***Συγκρίνω κλάσματα με το νου***

Για μερικές κατηγορίες κλασμάτων μπορούμε να κάνουμε προσεγγιστικούς υπολογισμούς με το νου. Ας συγκρίνουμε με το νου τα κλάσματα $\frac{25}{27}, \frac{1}{18}$, και $\frac{17}{36}$.

Λύση

Το κλάσμα $\frac{25}{27}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι **κοντά στο 1**, γιατί ο αριθμητής του είναι περίπου ίσος με τον παρονομαστή του. Το κλάσμα εκφράζει έναν αριθμό που είναι **κοντά στο 0**, γιατί ο αριθμητής του είναι πολύ μικρότερος από τον παρονομαστή του. Το κλάσμα $\frac{17}{36}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι **κοντά στο** $\frac{1}{2}$, γιατί ο αριθμητής του είναι περίπου ίσος με το μισό του παρονομαστή του.

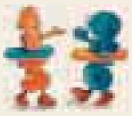
Εφαρμογή 2η ***Μετατρέπω ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα***

Να διατάξετε κατά φθίνουσα σειρά τα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{5}{9}$ και $\frac{6}{15}$, αφού τα κάνετε ομώνυμα.

Λύση

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών με ταυτόχρονες διαδοχικές διαιρέσεις: Ε.Κ.Π.(2, 9, 15) = 2 • 3 • 3 • 5 = 90. Κατόπιν διαιρούμε το Ε.Κ.Π. με κάθε παρονομαστή, για να βρούμε με ποιον αριθμό θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε κλάσμα: 90 : 2 = 45,   90 : 9 = 10, 90 : 15 = 6

2	**9**	**15**	**2**
1	**9**	**15**	**3**
	3	**5**	**3**
	1	**5**	**5**
		1	



Πολλαπλασιάζουμε κάθε κλάσμα με τον κατάλληλο αριθμό:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 45}{2 \cdot 45} = \frac{45}{90}$, $\quad \frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 10}{9 \cdot 10} = \frac{50}{90}$, $\quad \frac{6}{15} = \frac{6 \cdot 6}{15 \cdot 6} = \frac{36}{90}$

Απάντηση: Τα αρχικά κλάσματα μετατράπηκαν στα ισοδύναμά τους ομώνυμα και είναι: $\frac{50}{90} > \frac{45}{90} > \frac{36}{90}$
ή τα αρχικά κλάσματα —— > —— > —— .

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σύγκριση και διάταξη **ομώνυμων** και **ετερώνυμων κλασμάτων**. Δώσε ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
$\frac{1}{10} < \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$	❐	❐
Για να μετατρέψω τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα πολλαπλασιάζω τους όρους τους με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους.	❐	❐

Κεφάλαιο 23ο

Προβλήματα με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

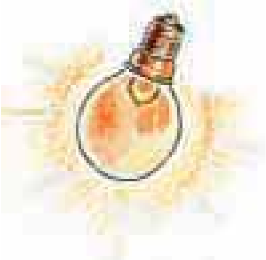
Η σωστή ενέργεια!

Προσθέτω και αφαιρώ κλάσματα.
Λύνω απλά προβλήματα με δεκαδικούς, μεικτούς και κλάσματα ακολουθώντας μια σειρά από βήματα.

Μερικές φορές η παρουσία των κλασμάτων σε ένα πρόβλημα προκαλεί ανησυχία για το πώς θα το λύσουμε. Αν συμβεί αυτό, θυμηθείτε ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός και στη θέση του θα μπορούσε να είναι ένας φυσικός ή δεκαδικός αριθμός.

Δραστηριότητα 1η

Διαβάζοντας στην ιστοσελίδα της Δ.Ε.Η. (www.dei.gr) στοιχεία σχετικά με την παραγωγή ενέργειας για το 2003 διαπιστώσαμε ότι η ενέργεια που παράχθηκε στη χώρα μας από ανανεώσιμες πηγές ήταν πολύ μικρή. Παρακάτω παρουσιάζονται τα στοιχεία για την ενέργεια που παράχθηκε το 2003 σε θερμοηλεκτρικούς σταθμούς:



- Το 0,15 της ενέργειας παράχθηκε με τη χρήση πετρελαίου.
- Τα $\frac{9}{20}$ παράχθηκαν με τη χρήση λιγνίτη.
- Το $\frac{1}{4}$ παράχθηκε με τη χρήση φυσικού αερίου.
- Η υπόλοιπη ενέργεια παράχθηκε σε υδροηλεκτρικούς σταθμούς.
- Είναι εύκολο να υπολογίσουμε αμέσως αυτό το μέρος της ενέργειας; ....
- Τι πρέπει να κάνουμε πριν προχωρήσουμε στις πράξεις για την επίλυση του προβλήματος;

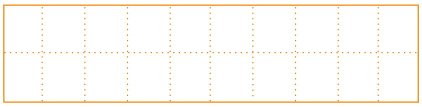
  ....

Δραστηριότητα 2η

Τα παιδιά θέλησαν να φυτέψουν στον κήπο του σχολείου φράουλες (ωριμάζουν στις αρχές Ιουνίου) και ρώτησαν αν υπάρχει καθόλου ελεύθερος χώρος. Ο δάσκαλος τους είπε: «Σωστή ενέργεια! Λοιπόν, το 0,1 του παρτεριού έχει γαρίφαλα, το $\frac{1}{4}$ έχει μαργαρίτες και τα $\frac{2}{5}$ έχουν γκαζόν. Αν υπάρχει ελεύθερος χώρος, είναι δικός σας!».

- Πώς θα βρούμε αν υπάρχει χώρος;..
- Γράψτε με τη σειρά τις ενέργειες που πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να βρουν τη λύση στο πρόβλημά τους:..

  ....
- Κάντε τις πράξεις. Μετά χωρίστε το σχεδιάγραμμα του παρτεριού σε όσα μέρη πρέπει και βάψτε με κίτρινο το μέρος με τις μαργαρίτες, με μοβ το μέρος με τα γαρίφαλα, με πράσινο το μέρος με το γκαζόν και με κόκκινο το μέρος με τις φράουλες.



Οι δραστηριότητες αυτές μας βοηθούν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων	**Παραδείγματα**
Για να **προσθέσουμε** ή να **αφαιρέσουμε ετερώνυμα** κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.	$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20}$
Προσθέτουμε ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.	$\frac{11}{18} + \frac{2}{18} = \frac{11+2}{18} = \frac{13}{18}$
Αφαιρούμε ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.	$\frac{11}{18} - \frac{2}{18} = \frac{11-2}{18} = \frac{9}{18}$

Όταν πρέπει να λύσω ένα πρόβλημα που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς:

✓ **Ελέγχω** αν οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
✓ Αν δεν είναι στην ίδια μορφή, τους **μετατρέπω** σε αριθμούς μιας μορφής.
✓ **Αποφασίζω** ποιες πράξεις πρέπει να κάνω.
✓ **Εκτελώ** τις πράξεις και ελέγχω το αποτέλεσμα.

Εφαρμογή 1η

Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{3}{5}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$.
Κούρεψαν όλο το γκαζόν; Αν όχι, πόσο έμεινε;

Λύση

✓ Οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
✓ Αρκεί λοιπόν να τους προσθέσουμε για να δούμε αν το κλάσμα που θα προκύψει θα έχει αριθμητή και παρονομαστή ίσους. Αν ναι, τότε θα είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή θα έχουν κουρέψει όλο το γκαζόν. Αν όχι, θα αφαιρέσουμε αυτό που θα βρούμε από το κλάσμα «μονάδα» για να βρούμε τη διαφορά τους:
✓ $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$ Ε.Κ.Π. (5, 4) = 20. Άρα: $\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$. Άρα: ——— − ——— = ———.

Απάντηση: Κούρεψαν τα $\frac{17}{20}$ του γκαζόν και μένουν ακόμη — για κούρεμα.

Εφαρμογή 2η

Ένα δοχείο χωράει 3 λίτρα. Κάποια στιγμή έχει $1\frac{3}{4}$ λίτρα νερό. Πόσο νερό χρειάζεται ακόμα για να γεμίσει;

Λύση

✓ Οι αριθμοί του προβλήματος δεν είναι στην ίδια μορφή. Θα τους μετατρέψουμε σε κλάσματα ομώνυμα, με παρονομαστή το 4. Έτσι: $3 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$ και $1\frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$
✓ Τώρα θα αφαιρέσουμε το νερό που υπάρχει από τη συνολική χωρητικότητα του δοχείου για να βρούμε τη διαφορά τους: $\frac{12}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$. Δηλαδή $\frac{4}{4} + \frac{1}{4}$ ή $1\frac{1}{4}$.

Απάντηση: Χρειάζεται ακόμη $1\frac{1}{4}$ λίτρα νερού για να γεμίσει.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

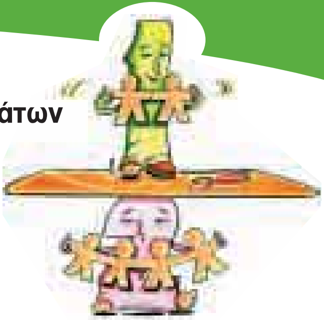
Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση κλασμάτων** καθώς και τη **λύση απλών προβλημάτων με κλάσματα**. Σχεδίασε ένα σύντομο πρόβλημα που να λύνεται έτσι.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Η ισότητα: $\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{9}{10}$ *είναι σωστή.*	❒	❒
Για να λύσω ένα πρόβλημα που οι αριθμοί του είναι φυσικοί, δεκαδικοί ή κλάσματα πρέπει πρώτα να τους μετατρέψω όλους στην ίδια μορφή.	❒	❒

Κεφάλαιο 24ο

Προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων



Ό,τι κι αν κάνεις, εγώ θα πολλαπλασιάζομαι!

Πολλαπλασιάζω και διαιρώ κλάσματα.
Λύνω προβλήματα υπολογισμού του κλασματικού μέρους ενός ποσού.
Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις που περιέχουν κλάσματα.

Η φράση «το κλάσμα ενός αριθμού» μπορεί να εννοηθεί ως ο πολλαπλασιασμός του κλάσματος με τον αριθμό αυτό. Για παράδειγμα, τα $\frac{3}{4}$ του 12 είναι $\frac{3}{4} \cdot 12$.

Δραστηριότητα 1η

Η μαμά σου έχει φτιάξει ένα μικρό ορθογώνιο κέικ, από το οποίο κόβεις το $\frac{1}{2}$. Από αυτό το κομμάτι τρως τα $\frac{3}{4}$. Αν προσπαθήσεις να υπολογίσεις με κλάσμα το μέρος που έφαγες, το κλάσμα αυτό θα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα κλάσματα $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$; ....

- Να σχεδιάσεις στο διπλανό σκίτσο το μέρος του ολόκληρου κέικ που έφαγες.
- Πόσο μέρος του κέικ έφαγες; ....
- Ποια πράξη θα κάνουμε για να βρούμε πόσο είναι τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{1}{2}$; ....
- Είναι το κλάσμα αυτό μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$; ....

Δραστηριότητα 2η

Πήγα σε ένα γαλακτοκομικό αγρόκτημα και αγόρασα γάλα σε ένα δοχείο 10 λίτρων. Το δοχείο δεν χωράει στο ψυγείο μου. Έτσι θέλω να το μεταγγίσω σε δοχεία των 2 λίτρων.

- Πόσα δοχεία χρειάζομαι; ....
- Γράψε την πράξη που έκανες: ....

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αγόρασα το $\frac{1}{2}$ λίτρο γάλα και θέλω να το μεταγγίσω σε μικρές ατομικές κανάτες του $\frac{1}{8}$ λίτρου για να τις σερβίρω με τον καφέ.

- Πόσες ατομικές κανάτες χρειάζομαι; ....
- Γράψε την πράξη που πρέπει να κάνεις: ....
- Γνωρίζεις ότι η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι αντίστροφες πράξεις. Άρα, αντί να διαιρέσεις, μπορείς να πολλαπλασιάσεις με τον αντίστροφο αριθμό.
- Δοκίμασε τώρα να κάνεις την προηγούμενη πράξη αντιστρέφοντας το δεύτερο κλάσμα

  ....
- Είναι λογικό το αποτέλεσμα; ....

Οι δραστηριότητες αυτές μας οδηγούν στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων

Για να **πολλαπλασιάσουμε** κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

Για να **διαιρέσουμε** δύο κλάσματα, αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Παραδείγματα

$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{6}{20}$ ή $\frac{3}{10}$

$\frac{5}{12}:\frac{1}{3}=\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{1}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 1}=\frac{15}{12}$ ή $1\frac{1}{4}$

Υπολογίζω μια αριθμητική παράσταση που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς

✓ **Εκτελώ** τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά, με τη γνωστή σειρά (πρώτα δυνάμεις, πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις και μετά προσθέσεις, αφαιρέσεις).
Αν υπάρχουν παρενθέσεις, κάνω τις πράξεις πρώτα μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.

✓ **Μετατρέπω** τους αριθμούς, σε όποια μορφή χρειάζεται για να κάνω πράξεις.

Εφαρμογή 1η ***Κλασματικό μέρος ενός ποσού***

Το κόστος ενός αυτοκινήτου για τον αντιπρόσωπο είναι τα $\frac{4}{5}$ της τιμής πώλησης. Το αυτοκίνητο πουλιέται 12.500 €. Να βρείτε πόσο κοστίζει στον αντιπρόσωπο.

Λύση

Μπορώ να υπολογίσω το κλασματικό μέρος ενός ποσού (τα $\frac{4}{5}$ του 12.500) με δύο τρόπους:

Α. Αναγωγή στην κλασματική μονάδα: Βρίσκω πρώτα το $\frac{1}{5}$ του 12.500 (12.500 : 5 = 2.500) και μετά βρίσκω τα $\frac{4}{5}$ (4 • 2500 = ...).

Β. Αρκεί να πολλαπλασιάσω το κλάσμα με το ποσό ($\frac{4}{5}$ • 12500 ....). Πολλαπλασιάζω κλάσμα με φυσικό αριθμό, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του με τον αριθμό αυτό (σαν να ήταν ο αριθμός κλάσμα με παρονομαστή το 1): $\frac{4}{5}\cdot 12500=\frac{4\cdot 12500}{5}=\frac{50000}{5}=$ ....

Απάντηση: Το αυτοκίνητο κοστίζει στον αντιπρόσωπο .... €.

Εφαρμογή 2η ***Μεικτές αριθμητικές παραστάσεις***

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $\left(4\cdot\frac{1}{2}+0,2+\frac{4}{5}\right):\left(3-1\frac{1}{3}\right)$

Λύση - Απάντηση

✓ Κάνω πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, με τη σειρά που πρέπει:

$\left(4\cdot\frac{1}{2}+0,2+\frac{4}{5}\right):\left(3-1\frac{1}{3}\right)=\left(— +0,2+\frac{4}{5}\right)$: .... —

✓ Μετατρέπω το δεκαδικό και το μεικτό αριθμό σε κλάσματα, για να συνεχίσω τις πράξεις:

(— + — + —) : — = ...

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τον **πολλαπλασιασμό** και τη **διαίρεση κλασμάτων** και τον **υπολογισμό μεικτών αριθμητικών παραστάσεων.** Σχεδίασε ένα σύντομο πρόβλημα που να λύνεται έτσι.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
➾ *Η ισότητα:* $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{18}{8}$ *είναι σωστή.*	❒	❒
➾ *Για να βρούμε το μισό του* $\frac{4}{5}$ *αρκεί να το πολλαπλασιάσουμε με το* $\frac{1}{2}$.	❒	❒

Ανακεφαλαίωση

Αριθμοί και πράξεις

Δίνω... λογαριασμό

Αριθμοί	• **Φυσικοί αριθμοί**	• 0 1 2 3 4 ...
	• **Δεκαδικοί αριθμοί**	• 0,1 1,05 80,5 100,2 0,03 ...
	Αξία θέσης	Η διαφορετική αξία που αποκτά ένα ψηφίο ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται στον αριθμό.
Πράξεις	• **Πρόσθεση**	• $5 + 3 = 3 + 5$ • $(5 + 3) + 7 = 5 + (3 + 7)$ } ιδιότητες της πρόσθεσης
	• **Αφαίρεση**	• $7 - 3 = 4$ $4 + 3 = 7$ $7 - 4 = 3$ } αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης
	• **Πολλαπλασιασμός**	• $8 \cdot 6 = 6 \cdot 8$ • $(8 \cdot 6) \cdot 5 = 8 \cdot (6 \cdot 5)$ • $8 \cdot (6 + 5) = 8 \cdot 6 + 8 \cdot 5$ • $8 \cdot (6 - 5) = 8 \cdot 6 - 8 \cdot 5$ } ιδιότητες του πολλαπλασιασμού
	• **Διαίρεση**	• τέλεια $Δ : δ = π$ $Δ : π = δ$ $π \cdot δ = Δ$ } αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού • ατελής? $Δ = δ \cdot π + υ$
	Σειρά των πράξεων	• παρενθέσεις - πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις - προσθέσεις και αφαιρέσεις
Ειδικά θέματα	• **Διαιρέτες**	• Οι αριθμοί που διαιρούν έναν αριθμό
	• **Μ.Κ.Δ.**	• Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες
	• **Πρώτοι αριθμοί**	• Αριθμοί με μόνους διαιρέτες το 1 και τον εαυτό τους
	• **Παραγοντοποίηση αριθμού**	• Ανάλυση του αριθμού σε γινόμενο πρώτων αριθμών
	• **Πολλαπλάσια**	• α, 2α, 3α, 4α, 5α, ...
	• **Ε.Κ.Π.**	• Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια
	• **Δυνάμεις**	• $5^α = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5}_{α \text{ φορές}}$
	• **Έκφραση αριθμού με τη βοήθεια δύναμης του 10**	• $6.000.000.000 = 6 \cdot 10^9$
Κλάσματα	• **Κλασματικοί αριθμοί** ως μέρος του όλου ως πηλίκο διαίρεσης	• Οι αριθμοί που γράφονται $\frac{α}{β}$ (ο αριθμός $β \neq 0$) τα 3 από τα 5 είναι τα $\frac{3}{5}$ $3 : 5 = \frac{3}{5}$
	• **Ισοδύναμα κλάσματα**	• $\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$

1η Άσκηση

Δείξε πάνω στην αριθμογραμμή με μια γραμμή τη σωστή θέση για κάθε καρτελάκι.

2η Άσκηση

Η πρώτη πράξη στη διπλανή κάρτα δηλώνει ότι 17 • 6 = 102.
Με αυτή τη βοήθεια πώς μπορείς να υπολογίσεις με το νου
το αποτέλεσμα της δεύτερης πράξης; Να εξηγήσεις τη σκέψη σου.

17 • 6 = 102
19 • 6 =

....

....

....

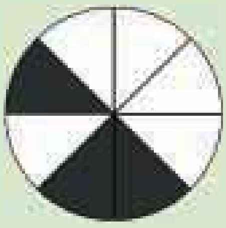
....

....

....

3η Άσκηση

Να γράψεις με κλάσμα και με δεκαδικό αριθμό το σκιασμένο μέρος του κύκλου.



Πρόβλημα

Να γράψετε με την ομάδα σου ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{5}$ και να το λύσετε.

....

....

....

....

....

....

....

Λύση

Απάντηση: ....

Εξισώσεις

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ		ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
25.	Η εξερεύνηση του άγνωστου!	Η έννοια της μεταβλητής	61
26.	Μαθαίνω να ισορροπώ!	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετέος	63
27.	Μαθηματικά σε κίνηση!	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος	65
28.	Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται!	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου	67
29.	Αντανακλάσεις...	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης	69
	Όταν ο άγνωστος αποκαλύπτεται	*Ανακεφαλαίωση για τη θεματική ενότητα 2: Εξισώσεις*	71

Εξισώσεις

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις. Με άλλα λόγια, με τη χρήση γραμμάτων ή συμβόλων στη θέση ενός αριθμού που δεν γνωρίζουμε.

Από την 8η χιλιετία π.Χ. οι κάτοικοι της Μεσοποταμίας, πολύ πριν από τους Σουμέριους, χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα αριθμητικής καταγραφής βασισμένο σε μικρές πήλινες «μάρκες». Από εκεί πληροφορούμαστε ότι χρησιμοποιούσαν αριθμητικές μεθόδους πολύ πιο εξελιγμένες από την απλή καταμέτρηση γεωργικών προϊόντων και τους απλούς εμπορικούς και οικονομικούς σκοπούς της εποχής τους.

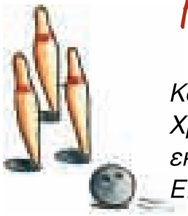
Βρέθηκαν στις «μάρκες» προβλήματα της εποχής εκείνης που απαιτούν τη χρήση εξισώσεων για την επίλυσή τους. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω πρόβλημα.

> *Βρήκα μια πέτρα. Δεν (τη) ζύγισα. Αφαίρεσα το ένα έβδομο. Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο. Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο. (Τη) ζύγισα. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας;*

Φαίνεται πως τα Μαθηματικά ήταν για τους κατοίκους της Μεσοποταμίας ένα απαραίτητο εργαλείο με το όποιο μπορούσαν να αποκρυπτογραφήσουν τις κινήσεις του Ουρανού και μια γλώσσα με την οποία μπορούσαν να επικοινωνήσουν και να καταλάβουν τους θεούς τους.

Κεφάλαιο 25ο Η έννοια της μεταβλητής

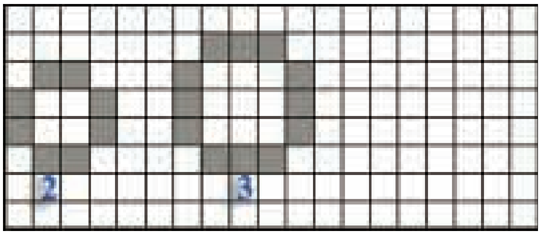
Η εξερεύνηση του άγνωστου!



Κατανοώ την έννοια «μεταβλητή».
Χρησιμοποιώ μεταβλητές για να εκφράσω τις σχέσεις στις εκφράσεις, τις ισότητες, τις ανισότητες και τις γεωμετρικές σχέσεις.
Επιλέγω μεταβλητές και σχηματίζω αριθμητικές παραστάσεις.

Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό σχήμα σχεδιάσαμε σε μιλιμετρέ χαρτί το γράμμα «Ο» σε δύο μεγέθη. Ανάλογα με την πλευρά του καθενός τα ονομάσαμε μέγεθος 2 και μέγεθος 3.



- Συνέχισε βάφοντας όσα τετράγωνα χρειάζεται για να σχηματιστεί το επόμενο μέγεθος (μέγεθος 4).
- Πόσα τετράγωνα πρέπει να βάψεις για κάθε πλευρά;

....

....

- Συμπλήρωσε στο διπλανό πίνακα το συνολικό αριθμό από σκιασμένα τετράγωνα που χρειάζεται για να σχηματιστεί κάθε μέγεθος.

Μέγεθος του γράμματος	***2***	***3***	***4***	***9***	***12***
Τετράγωνα που χρειάζονται					

- Παρατήρησε τον πίνακα και εξήγησε με ποιον τρόπο μεταβάλλεται ο συνολικός αριθμός των τετραγώνων όταν μεταβάλλεται ο αριθμός των τετραγώνων της πλευράς. ....
- Η σχέση του συνολικού αριθμού τετραγώνων με το μέγεθος είναι «...επί το μέγεθος» ή ο συνολικός αριθμός τετραγώνων ισούται με το γινόμενο «............. • **μ**» (όπου **μ** το μέγεθος).
- Υπολόγισε με το σύντομο τρόπο (4 • μ) τα συνολικά τετράγωνα για το μέγεθος 17.

....

- Τι μεγέθους είναι το όμικρον που έχει 132 τετράγωνα; ....

Δραστηριότητα 2η

Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε τις ηλικίες του Κώστα και της Σμαρώς για κάθε χρονιά. Μετά απάντησε στις ερωτήσεις.

Χρονιά	Ηλικία Σμαρώς	Ηλικία Κώστα
2006	12	16
2007		
2008		
2009		
2010		

- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 12, η ηλικία του Κώστα θα είναι: 12 +........
- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 25, η ηλικία του Κώστα θα είναι: 25 +........
- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι **x**, η ηλικία του Κώστα θα είναι: ....

Έχουμε μάθει ότι μια αριθμητική παράσταση περιέχει αριθμούς και πράξεις. Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορεί να περιέχει και **γράμματα.**

Άγνωστος / Μεταβλητή

Το **γράμμα** ή το **σύμβολο** που χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση στη θέση μιας τιμής άγνωστης ή μεταβαλλόμενης λέγεται **μεταβλητή.**

Παραδείγματα

Εμβαδό τετραγώνου: $\boldsymbol{\alpha}^2$,
όπου **α** = το μήκος της πλευράς του.

Εφαρμογή 1η Επιλέγω μεταβλητή

Να εκφράσετε με μια αριθμητική παράσταση τη φράση: «Έφαγαν όλα τα γλυκά! Αυτά που έφερε η Σοφία, τα 4 που έφερε η Φρόσω και τα 10 που έφερα εγώ.»

Λύση

Οποιοδήποτε γράμμα (ή σύμβολο) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή και μια μεταβλητή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση οποιουδήποτε αριθμού. Για να εκφράσουμε μια φράση με αριθμητική παράσταση ακολουθούμε τρία βήματα:

1. *Προσδιορίζουμε την άγνωστη ποσότητα.*
2. *Επιλέγουμε μια μεταβλητή για την άγνωστη ποσότητα.*
3. *Προσδιορίζουμε τις πράξεις ανάμεσα στους αριθμούς και τη μεταβλητή.*

Στη συγκεκριμένη φράση:

1. *Έχουμε έναν άγνωστο: τα γλυκά που έφερε η Σοφία.*
2. *Επιλέγουμε* ***σ*** *= τα γλυκά της Σοφίας.*
3. *Έφαγαν τα γλυκά της Σοφίας, συν 4, συν 10. Άρα έφαγαν* ***σ + 4 + 10****, δηλαδή* ***σ + 14.***

Θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης όταν μάθουμε τον αριθμό που αντιπροσωπεύει η μεταβλητή της.

Απάντηση: Έφαγαν **σ** + 14, όπου **σ** τα γλυκά της Σοφίας.

Εφαρμογή 2η Υπολογίζω τις τιμές

Με βάση το σχήμα να εκφράσεις τις σχέσεις ανάμεσα στα μεγέθη των ωκεανών χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή. Αν ο Ατλαντικός έχει έκταση 100.000.000 τετρ. χλμ. υπολόγισε την έκταση των άλλων ωκεανών.

Λύση - Απάντηση

1ο βήμα: Συμβολίζω την έκταση του Ατλαντικού με ένα γράμμα. Π.χ. το ***α*** και γράφω:

Η έκταση του Ατλαντικού: ***α***

Η έκταση του Ειρηνικού ....τετρ. χμ.

Η έκταση του Ινδικού: . ...τετρ. χμ

2ο βήμα: Αντικαθιστώ τη μεταβλητή ***α*** με την τιμή της (100.000.000) και κάνω τις πράξεις.

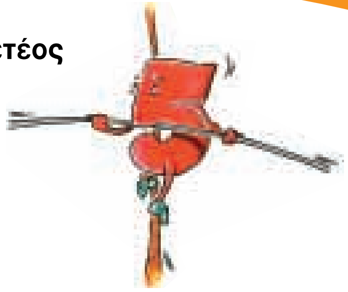
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο: **μεταβλητή**. Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή σε ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
➾ *Στην αριθμητική παράσταση 2 • (♣ – 1) δεν υπάρχει μεταβλητή.*	❒	❒
➾ *Το γινόμενο* $\boldsymbol{\alpha}^2$ *είναι το εμβαδό τετραγώνου με πλευρά 2.*	❒	❒
➾ *Η ισότητα 2x = 2 • x είναι σωστή.*	❒	❒

Κεφάλαιο 26ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετέος



Μαθαίνω να ισορροπώ!

Σχηματίζω την εξίσωση ενός προβλήματος.
Λύνω μια εξίσωση με δοκιμές και έλεγχο.
Λύνω μια εξίσωση χρησιμοποιώντας την αφαίρεση ως αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης.

Δραστηριότητα 1η

Η Δέσποινα πήγε στο σχολείο με μερικά ψιλά στην τσέπη της. Στο δρόμο βρήκε 23 λεπτά. Όταν έφτασε στο σχολείο και μέτρησε τα λεφτά της είδε ότι είχε 1,13 €. Πόσα χρήματα είχε άραγε όταν έφυγε από το σπίτι;

- Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή για να συμβολίσεις το ποσό που μας ζητάει να βρούμε.

  ....

- Μπορείς με τη βοήθεια της μεταβλητής που επέλεξες και τα ποσά που ήδη γνωρίζεις να εκφράσεις με μια ισότητα την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα;

  ....

- Γράψε την ισότητα: ....
- Οι φίλοι της Δέσποινας διαφωνούν για τα λεπτά που είχε στην τσέπη της. Ο Ανδρέας λέει ότι ήταν 80, η Ειρήνη 85, ο Χρήστος 90 και η Πόπη 95 λεπτά. Ποιος έχει δίκιο και γιατί;

  ....

Δραστηριότητα 2η

Η Μαρία αγόρασε στις διακοπές της ένα καλοκαιρινό μπλουζάκι που κόστιζε 12,50 € και ζήτησε από το κατάστημα να προσθέσουν επάνω μια σιδερότυπη στάμπα με το όνομά της. Στο τέλος πλήρωσε 18,40 €. Πόσο στοιχίζει η στάμπα;

- Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή για να συμβολίσεις το ποσό που μας ζητάει να βρούμε, και σχημάτισε την ισότητα με τα στοιχεία του προβλήματος:

  ....

- Αν η Μαρία μετανιώσει για τη στάμπα που πρόσθεσε στο μπλουζάκι της μπορεί να αναιρέσει αυτή τη διαδικασία;..
- Οι ενέργειες που αναιρούν η μία την άλλη λέγονται ....
  Γράψε τις αντίστροφες στις πιο κάτω ενέργειες:
  Ανεβαίνω .... Προσθέτω ....
- Στα μαθηματικά αναιρείται η πρόσθεση; ....
- Αν ναι με ποιον τρόπο;..
- Με βάση τις αντίστροφες πράξεις γράψε τις αφαιρέσεις που προκύπτουν από μια πρόσθεση, για παράδειγμα: 5 + 3 = 8

  ..... – ..... = ...   και ..... – ..... = ...

- Εφαρμόζοντας τις αντίστροφες πράξεις, τι θα κάνεις για να βρεις τον άγνωστο προσθετέο στην ισότητα που έγραψες για το πρόβλημα;

  ....
  ....

Από τα προηγούμενα διαπιστώνουμε ότι ένα πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί συμβολικά με μια ισότητα βάζοντας στη θέση του άγνωστου ποσού μια μεταβλητή.

	Παραδείγματα
Εξίσωση Μια ισότητα που περιέχει μια μεταβλητή, λέγεται **εξίσωση** με έναν άγνωστο.	x + 5 = 12
Η τιμή που επαληθεύει την εξίσωση ονομάζεται **λύση της εξίσωσης**.	Η λύση της εξίσωσης x + 5 = 12 είναι ο αριθμός 7. Αν αντικαταστήσω τη μεταβλητή με το 7 έχω 7 + 5 = 12
Όταν ο άγνωστος έχει τη θέση **προσθετέου**, για να λύσω την εξίσωση **αφαιρώ από το άθροισμα τον άλλο προσθετέο**.	Η λύση της εξίσωσης x + 5 = 12 είναι x = 12 - 5

Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί. Αν πρέπει να αφαιρέσω έναν αριθμό από τη μία πλευρά, για να συνεχίσει να ισορροπεί, πρέπει να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό κι από την άλλη.

Εφαρμογή 1η ***Η εξίσωση σαν ζυγαριά***

Σε μια ζυγαριά με δύο δίσκους τοποθετούμε στον έναν βάρος 115 γραμμαρίων και στον άλλο 45 γραμμάρια. Πόσο βάρος πρέπει να τοποθετήσουμε ακόμη, ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά; Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής, γράψε την εξίσωση που περιγράφει την κατάσταση αυτή και υπολόγισε τον άγνωστο.

Λύση

1. Ονομάζω την άγνωστη τιμή **x.** Η εξίσωση στη ζυγαριά είναι 45 + **x** = 115.
2. Σκέφτομαι πως για να ισορροπήσει η ζυγαριά πρέπει τα βάρη στους δυο δίσκους να είναι ίσα. Υπολογίζω με το νου πόσο είναι το **x**, προσθέτοντας όσο βάρος χρειάζεται στο 45 ώστε να γίνει 115. Έτσι 45 + ... = 115. Άρα **x** = ...

Απάντηση: Πρέπει να βάλουμε ακόμη .... γραμμάρια στο δίσκο.

Εφαρμογή 2η ***Λύση εξίσωσης με τις αντίστροφες πράξεις***

Ο Λευτέρης είχε 16 κάρτες ποδοσφαιριστών, όταν άρχισε να παίζει με τον Γιώργο και κέρδισε μερικές από αυτόν. Τώρα έχει 27 κάρτες. Πόσες κάρτες κέρδισε από τον Γιώργο; Να εκφράσεις με εξίσωση το πρόβλημα και να το λύσεις.

Λύση

1. Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των καρτών που κέρδισε ο Λευτέρης. Την ονομάζω **κ**.
2. Η εξίσωση είναι 16 + **κ** = 27. Για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από το άθροισμα τον άλλο προσθετέο:
3. **κ** = ... – .... Άρα **κ** = ...

Απάντηση: Ο Λευτέρης κέρδισε .... κάρτες από τον Γιώργο.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εξίσωση** και **άγνωστος προσθετέος** και μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις πρόσθεσης. Παρουσίασε ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
➾ *Λύση μιας εξίσωσης είναι η τιμή του άγνωστου που επαληθεύει την εξίσωση.*	❒	❒
➾ *Η λύση της εξίσωσης 15 + **α** = 15 είναι το 1.*	❒	❒
➾ *Σε μια εξίσωση πρόσθεσης, κάνεις αφαίρεση για να τη λύσεις.*	❒	❒

Κεφάλαιο 27ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος

Μαθηματικά σε κίνηση!

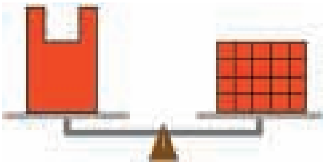
Σχηματίζω την εξίσωση ενός προβλήματος.
Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις της αφαίρεσης για να λύσω μια εξίσωση.

Δραστηριότητα 1η

Στη διπλανή ζυγαριά από έναν άγνωστο αριθμό κύβων **(κ)** αφαιρώ 4 κύβους και η ζυγαριά ισορροπεί.

- Γράψε την εξίσωση που περιγράφει αυτή την ισορροπία:

  ....

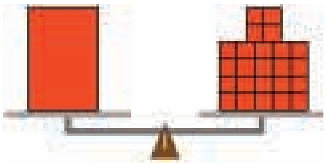


- Κατόπιν προσθέτω 4 κύβους σε κάθε πλευρά.
- Εξήγησε: Γιατί η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί;

  ....

- Αρχικά στον αριστερό δίσκο είχαμε **κ - 4** κύβους. Τώρα πόσους έχουμε; ....
- Γράψε την ισότητα που περιγράφει τώρα την ισορροπία

  ....



- Παρατηρώντας τις αλλαγές που έγιναν, μπορείς να διατυπώσεις έναν κανόνα για τον τρόπο που βρίσκουμε τη λύση όταν ο άγνωστος της εξίσωσης είναι μειωτέος;

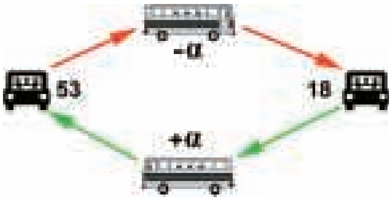
  ....

Δραστηριότητα 2η

Οι 53 αθλητές του σχολείου ανέβηκαν στο λεωφορείο που θα τους μετέφερε στο στάδιο. Τα αγόρια κατέβηκαν στην κεντρική είσοδο. Το λεωφορείο στη συνέχεια μετέφερε τις 18 αθλήτριες σε άλλη είσοδο στην άλλη πλευρά του σταδίου. Πόσα ήταν τα αγόρια;

- Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή (α) γράψε την εξίσωση που εκφράζει το πρόβλημα:

  ....



- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η **μετάβαση** στο στάδιο και η **επιστροφή** των παιδιών.
- Παρατήρησε τη σχέση που έχει το σύνολο των παιδιών (53) με τον αριθμό των αγοριών και των κοριτσιών και απάντησε στην ερώτηση:

  Τι θα κάνεις για να βρεις πόσα είναι τα αγόρια;

  ....

- Υπολόγισε την τιμή του άγνωστου στην εξίσωση που έγραψες:

  ....

- Μπορείς να διατυπώσεις και να γράψεις έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι αφαιρετέος;

  ....

- Γράψε την εξίσωση που εκφράζει την **επιστροφή των παιδιών** και υπολόγισε την τιμή του άγνωστου:

  ....

Ολοκληρώνοντας τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι:

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι μειωτέος
Όταν ο άγνωστος είναι ο **μειωτέος,** για να λύσω την εξίσωση **προσθέτω στη διαφορά τον αφαιρετέο.**

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι αφαιρετέος
Όταν ο άγνωστος είναι ο **αφαιρετέος,** για να λύσω την εξίσωση **αφαιρώ από τον μειωτέο τη διαφορά.**

Παραδείγματα

Η λύση της εξίσωσης **x** - 5 = 12 είναι: **x** = 12 + 5

Η λύση της εξίσωσης 18 - **x** = 7 είναι: **x** = 18 - 7

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν προσθέσω και στα δυο μέρη τον ίδιο αριθμό.

Εφαρμογή 1η **Σχηματίζω και λύνω εξισώσεις**

Η Δήμητρα πριν φύγει για το μάθημα της Μουσικής, πήρε από το πορτοφόλι της βιαστικά μερικά κέρματα και πήγε στο βιβλιοπωλείο. Αγόρασε ένα τετράδιο πενταγράμμου που έκανε 2,90 € και ένα ντοσιέ για τα φύλλα των ασκήσεων που έκανε 3,50 €. Όταν γύρισε είδε ότι είχε στην τσέπη της 2,30 €. Προσπάθησε να σχηματίσεις την εξίσωση και να υπολογίσεις πόσα χρήματα είχε πάρει από το πορτοφόλι.

Λύση Ονομάζω x την άγνωστη τιμή (τα χρήματα που πήρε).
α΄ τρόπος: Σχηματίζω την εξίσωση: **x** – (2,90 + 3,50) = 2,30.
Κάνω πρώτα την πράξη στην παρένθεση: **x** – 6,40 = 2,30.
Για να λύσω την εξίσωση, προσθέτω στη διαφορά τον αφαιρετέο:
x = 2,30 + 6,40. Άρα **x** = 8,70. Επαληθεύω την εξίσωση: 8,70 – (2,90 + 3,50) = 2,30
Απάντηση: Είχε πάρει 8,70 € από το πορτοφόλι της.
β΄ τρόπος: x – 2,30 = 2,90 + 3,50 ....
γ΄ τρόπος: x = 2,90 + 3,50 + 2,30 ....

Εφαρμογή 2η **Πόσα χρήματα του έπεσαν;**

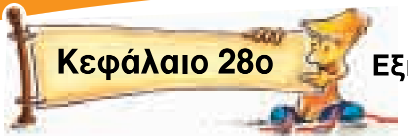
Ο Αριστοτέλης ξεκίνησε για το σχολείο με 1,20 € στην τσέπη του. Όταν έφτασε στο σχολείο, διαπίστωσε ότι η τσέπη του ήταν τρύπια και του είχαν μείνει μόνο 85 λεπτά. Πόσα χρήματα του έπεσαν στο δρόμο; Να εκφράσεις με μια εξίσωση το πρόβλημα του Αριστοτέλη και μετά να το λύσεις.

Λύση
Άγνωστη τιμή είναι τα λεπτά που έχασε ο Αριστοτέλης. Την ονομάζω **λ**.
Με βάση το πρόβλημα σχηματίζω την εξίσωση: 1,20 – **λ** = 0,85.
Για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από το μειωτέο τη διαφορά:
λ = ... – .... Άρα **λ** = ... *Επαληθεύω την εξίσωση*: 1,20 – .... = 0,85
Απάντηση: Του έπεσαν 35 λεπτά.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε να βρίσκουμε τον άγνωστο όταν είναι **μειωτέος** ή **αφαιρετέος** σε μια εξίσωση. Παρουσίασε ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Για να κάνω επαλήθευση, αντικαθιστώ τη μεταβλητή με την τιμή της.	❐	❐
Για να «ισορροπήσουν» τα δυο μέρη μιας εξίσωσης αρκεί να προσθέσω ή να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό και από τα δυο μέρη.	❐	❐
Οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος λύνονται με μια πρόσθεση.	❐	❐



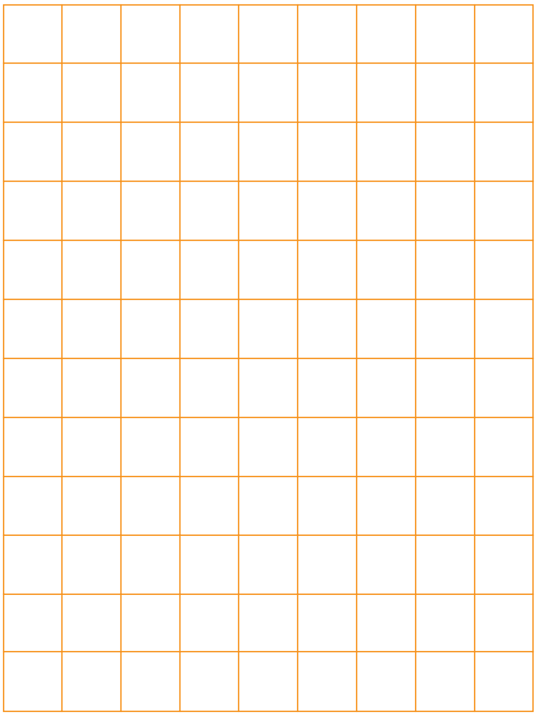
Κεφάλαιο 28ο Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου

Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται!

Μελετώ τον τύπο του εμβαδού ως εξίσωση.
Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις του πολλαπλασιασμού.
Λύνω εξισώσεις όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου.

Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό πλαίσιο κάθε τετραγωνάκι είναι 1 τετραγωνικό εκατοστό. Με 3 διαφορετικά χρώματα, να σχεδιάσεις 3 διαφορετικά ορθογώνια με εμβαδό 24 τετραγωνικά εκατοστά το καθένα.



Μήκος	Πλάτος (εκ.)	Εμβαδό (τ.εκ.)
4	6	24

- Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με τα στοιχεία των ορθογωνίων που σχεδίασες (το πλάτος είναι οριζόντια):
- Τι παρατηρείς για τη σχέση του εμβαδού με το μήκος και το πλάτος;
- Χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή για το μήκος, μία για το πλάτος και μία για το εμβαδό, γράψε την εξίσωση που δείχνει πώς σχετίζονται το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό σε ένα ορθογώνιο:

  ....

Δραστηριότητα 2η

- Γνωρίζοντας το εμβαδό ενός ορθογωνίου και τη μία από τις δύο πλευρές του, γράψτε με ποιο τρόπο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την άλλη πλευρά.

  ....

- Γράψτε τις διαιρέσεις που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό: $5 \cdot 3 = 15$

  ..... = ... : .....   και ..... = ... : .....

- Σε ένα ορθογώνιο το πλάτος είναι 3 εκατοστά και το εμβαδό 36 τ. εκ. Να σχηματίσετε την εξίσωση του εμβαδού και να βρειτε την τιμή του άγνωστου:

  ....

- Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου;

  ....

  ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου

Όταν ο άγνωστος είναι **παράγοντας γινομένου,** για να λύσουμε την εξίσωση **διαιρούμε το γινόμενο με τον άλλο παράγοντα.**

Παραδείγματα

Η λύση της εξίσωσης $x \cdot 5 = 20$ είναι: $x = 20 : 5$

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν διαιρέσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό.

Εφαρμογή 1η

Η Μαργαρίτα πολλές φορές για να βοηθήσει τη θεία της και να βγάλει χαρτζιλίκι, προσέχει το μικρό ανιψάκι της. Πληρώνεται με 3 € την ώρα. Χρειάζεται να μαζέψει 165 €. Πόσες ώρες πρέπει να κρατήσει το παιδί;

Λύση

- Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των ωρών **(ω)** που πρέπει να κρατήσει το παιδί
- Γράφω την εξίσωση: .... • **ω** = 165
- Κάνω την αντίστροφη πράξη: **ω** = ... : ...... Άρα **ω** = ...
- *Επαλήθευση:* αντικαθιστώ τη μεταβλητή με την τιμή στην αρχική εξίσωση και κάνω την πράξη: 3 • .... = 165

Απάντηση:

Πρέπει να κρατήσει το παιδί για .... ώρες (!)

Εφαρμογή 2η

Ο Δημοσθένης ξέρει πως, όταν γράφει τις εργασίες του στον υπολογιστή, η σελίδα χωράει περίπου 250 λέξεις. Πρέπει να γράψει μια εργασία 1.500 λέξεων. Πόσες σελίδες θα είναι; Λύστε το πρόβλημα με εξίσωση.

Λύση

- Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των σελίδων που θα χρειαστούν. Την ονομάζω σ.
- Η εξίσωση είναι $250 \cdot \sigma = 1.500$.
- Κάνω την αντίστροφη πράξη: $\sigma = 1500 : 250$. Άρα $\sigma = 6$.
- Επαλήθευση: $250 \cdot 6 = 1.500$

Απάντηση:

Η εργασία θα είναι 6 σελίδες.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε πώς να λύνουμε εξισώσεις στις οποίες ο **άγνωστος** είναι **παράγοντας γινομένου**. Δώσε ένα δικό σου παράδειγμα μιας τέτοιας εξίσωσης.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού είναι η διαίρεση.	❒	❒
Η εξίσωση α • 10 = 10 δεν έχει λύση.	❒	❒
Η εξίσωση 6x = 18 εκφράζει το εξής πρόβλημα: «Αγόρασα 6 περιοδικά και ξόδεψα x €. Κάθε περιοδικό κόστιζε 18 €. Πόσα € ξόδεψα;»	❒	❒

Κεφάλαιο 29ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης

Αντανακλάσεις...

Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις μιας διαίρεσης.
Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις για να λύσω μια εξίσωση όταν ο άγνωστος έχει τη θέση του διαιρετέου ή του διαιρέτη.

Δραστηριότητα 1η

Μετά από μια εκπαιδευτική επίσκεψη στους χώρους του εργοστάσιου χαρτοποιίας, ο υπεύθυνος έδωσε στους μαθητές ένα κιβώτιο με τετράδια (**τ**) για να τα μοιραστούν. Πόσα ήταν τα τετράδια, αν οι 85 μαθητές του σχολείου πήραν 2 τετράδια ο καθένας;

- Γράψε την εξίσωση που *περιγράφει* το πρόβλημα ....
- Υπολόγισε «με το νου» πόσα ήταν τα τετράδια:.............................
- Πως σκέφτηκες για να το βρεις;..
- Γράψε τον πολλαπλασιασμό που προκύπτει από τη διαίρεση:

  15 **:** 3 = 5 **...... = ... • ......**
- Αφού διαπίστωσες ότι ο πολλαπλασιασμός είναι η αντίστροφη πράξη της διαίρεσης, με ποιον τρόπο θα λύσεις την εξίσωση;...
- Με ποιον τρόπο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι διαιρετέος;

  ....

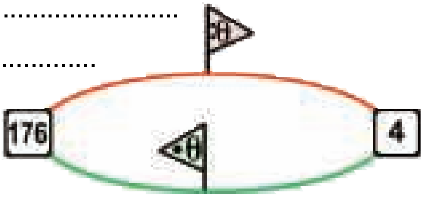
Δραστηριότητα 2η

Σε πόσες θήκες (θ) μπορούμε να μοιράσουμε τα 176 αυγά της φάρμας όταν κάθε θήκη χωράει 4 αυγά;

- Γράψε την εξίσωση του προβλήματος:

  ....
- Στο διπλανό σχήμα η κόκκινη γραμμή ή η πράσινη δείχνει το μοίρασμα των αυγών σε θήκες τεσσάρων θέσεων; ....
  Με ποια πράξη μπορείς να υπολογίσεις πόσες θήκες χρειάζονται; ....
- Υπολόγισε τις θήκες που χρειάζονται: ....
- Υπολόγισε με τον ίδιο τρόπο την τιμή του άγνωστου στην εξίσωση που έγραψες:

  ....



- Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι διαιρέτης; ....

  ....
- Παρατηρώντας το σχήμα να περιγράψετε στην ομάδα σας τι μας λέει η εξίσωση της πράσινης γραμμής να τη γράψετε και να υπολογίσετε την τιμή του άγνωστου: ....

  ....
- Αν αντικαταστήσεις τον άγνωστο με την τιμή που βρήκες, επαληθεύονται και οι δυο εξισώσεις;

  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι ο τρόπος λύσης των εξισώσεων διαίρεσης εξαρτάται από το αν ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης.

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι διαιρετέος

Όταν ο άγνωστος είναι **διαιρετέος,** για να λύσουμε την εξίσωση **πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο με τον διαιρέτη.**

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι διαιρέτης

Όταν ο άγνωστος είναι διαιρέτης, για να λύσουμε την εξίσωση **διαιρούμε τον διαιρετέο με το πηλίκο.**

Παραδείγματα

Η λύση της εξίσωσης x : 5 = 8 είναι: x = 5 • 8

Η λύση της εξίσωσης 18 : x = 36 είναι: x = 18 : 36

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν πολλαπλασιάσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό.

Εφαρμογή 1η

Η Διευθύντρια του σχολείου έδωσε στις μαθήτριες της Στ΄ τάξης ένα ρολό κορδέλα για τις ανάγκες του χορευτικού που θα παρουσίαζαν. Εκείνες τη χώρισαν σε 18 ίσα κομμάτια. Κάθε κομμάτι ήταν 81 εκατοστά. Πόσα μέτρα ήταν η κορδέλα που τους έδωσε η Διευθύντρια;

Λύση

Ονομάζω την άγνωστη τιμή **σ**.

- Σχηματίζω την εξίσωση **σ :** 18 = 81.
- Όταν ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος για να βρω την τιμή του πολλαπλασιάζω το πηλίκο με τον διαιρέτη: **σ** = 81 • 18. Άρα **σ** = 1.458.
- *Επαληθεύω*: 1.458 **:** 18 = 81
- Μετατρέπω τα εκατοστά σε μέτρα: 1.458 **:** 100 = 14,58

Απάντηση: Η κορδέλα που τους έδωσε η Διευθύντρια ήταν 14,58 μέτρα.

Εφαρμογή 2η

Ο Θωμάς θέλει να ταξινομήσει τις κάρτες του με τους ποδοσφαιριστές σε κουτιά που χωράνε 45 κάρτες το καθένα. Έχει συνολικά 540 κάρτες. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;

Λύση

Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των κουτιών (**κ**) που χρειάζεται ο Θωμάς.

α΄ τρόπος: Σχηματίζω την εξίσωση 540 **:** **κ** = 45

Εφαρμόζω την μέθοδο της διαίρεσης:

κ = 540 **:** 45. Άρα **κ** = 12.

Επαληθεύω: 540 **:** 12 = 45

Απάντηση: Θα χρειαστεί 12 κουτιά.

β΄ τρόπος: 45 • **κ** = 540 ....

....

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **άγνωστος διαιρετέος** και **άγνωστος διαιρέτης** και μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις αφαίρεσης. Παρουσίασε με την ομάδα σου ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Μια εξίσωση διαίρεσης λύνεται μόνο με πολλαπλασιασμό.	❒	❒
Για να υπολογίσουμε τον άγνωστο όταν έχει τη θέση του διαιρέτη σε μια εξίσωση, πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο με τον διαιρέτη.	❒	❒

Εξισώσεις

«Όταν ο άγνωστος αποκαλύπτεται»

Ορισμοί

Ορισμός	Παράδειγμα
Μεταβλητή οποιοδήποτε γράμμα (ή σύμβολο) που μπαίνει στη θέση μιας άγνωστης τιμής	ω, x, …
Εξίσωση μία ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μία μεταβλητή	5 + x = 10,5
Λύση της εξίσωσης η τιμή που την επαληθεύει	x = 5,5

Περιπτώσεις εξισώσεων

Περίπτωση	Παράδειγμα		
Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους προσθετέους	κάνουμε αφαίρεση, π.χ.:		
	x + 0,2 = 12,8	άρα x = 12,8 - 0,2	άρα x = 12,6
	2 + x = 11,5	άρα x = 11,5 - 2	άρα x = 9,5
Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι μειωτέος	κάνουμε πρόσθεση, π.χ.:		
	x - 31 = 45	άρα x = 45 + 31	άρα x = 76
Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι αφαιρετέος	κάνουμε αφαίρεση, π.χ.:		
	20,1 - x = 7	άρα x = 20,1 - 7	άρα x = 13,1
Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους παράγοντες του γινομένου	κάνουμε διαίρεση, π.χ.:		
	x • 3 = 96	άρα x = 96 : 3	άρα x = 32
	14 • x = 11,2	άρα x = 11,2 : 14	άρα x = 0,8
Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος	κάνουμε πολλαπλασιασμό, π.χ.:		
	x : 0,5 = 24	άρα x = 24 • 0,5	άρα x = 12
Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρέτης	κάνουμε διαίρεση, π.χ.:		
	144 : x = 9	άρα x = 144 : 9	άρα x = 16

Χρυσός κανόνας

Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί.
Η ισορροπία πρέπει να διατηρηθεί μέχρι το τέλος, όταν θα έχει μείνει μόνο ο άγνωστος από τη μια μεριά και η τιμή του από την άλλη.
Για να διατηρείται πάντα η ισορροπία, ό,τι κάνουμε από τη μια μεριά, πρέπει να κάνουμε κι από την άλλη.

Άσκηση

Να αντιστοιχίσεις τα δύο μέρη των εξισώσεων όταν $x = 9$.

2x	=	8
5 + x	=	18
x – 1	=	14
7x	=	1
10 – x	=	2
18 : x	=	63
x : 3	=	3

1ο Πρόβλημα "Το πάρτι"

Σε ένα πάρτι με μπουφέ υπήρχαν 40 μικρά γλυκά. Μετά το γεύμα πέρασαν όλοι οι καλεσμένοι και πήραν από 3 γλυκά ο καθένας. Στο τέλος έμειναν 4 γλυκά στο δίσκο. Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι; (Να το λύσεις με εξίσωση)

Λύση

Απάντηση: ....

2ο Πρόβλημα "Σχολικό περιοδικό"

Η Όλγα υπολογίζει τα έξοδα για την εκτύπωση ενός σχολικού περιοδικού. Εάν το τυπώσει στο «ΕΚΤΥΠΟΝ», κοστίζει 5 λεπτά η σελίδα για οποιονδήποτε αριθμό αντιγράφων, χωρίς επιπλέον χρέωση για τη σελιδοποίηση. Εάν το τυπώσει στο «ΕΝΤΥΠΟΝ», κοστίζει 40 € η σελιδοποίηση και στη συνέχεια 4 λεπτά η σελίδα.

α) Πόσο θα χρεώσει το «ΕΚΤΥΠΟΝ» για 200 αντίγραφα ενός περιοδικού 30 σελίδων;

β) Πόσο θα χρεώσει το «ΕΝΤΥΠΟΝ» για την ίδια εργασία;

γ) Εάν η Όλγα ήθελε μόνο 100 αντίγραφα του περιοδικού, ποια εταιρία θα της έδινε την φτηνότερη λύση;

Λύση

Απάντηση: ....

3ο Πρόβλημα "Τραπεζικές εργασίες"

Τη Δευτέρα, η Άρτεμη έβαλε 23 € στον τραπεζικό της λογαριασμό ο οποίος έγινε 57 €.

Τι περιγράφει η εξίσωση δ + 23 = 57; ....

Τι αντιπροσωπεύει το δ; ....

Πόσο ήταν το δ; ....

Η εξίσωση 57 - τ = 49 περιγράφει την κίνηση του λογαριασμού την Τετάρτη.

Τι έκανε η Άρτεμη την Τετάρτη; ....

Πόσο είναι το τ; ....

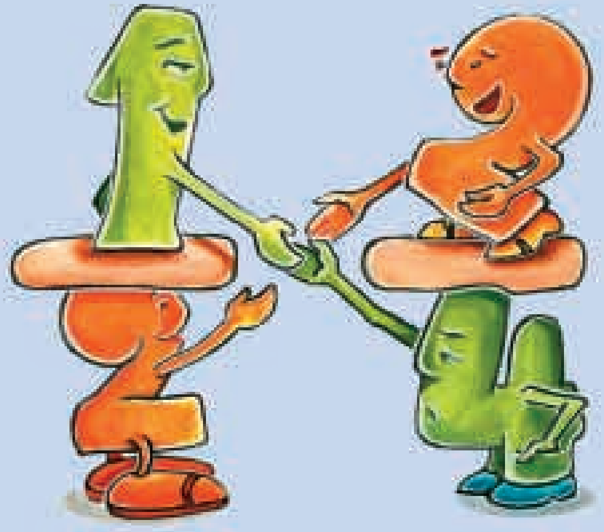
Η εξίσωση 49 - γ = 49 περιγράφει την κίνηση του λογαριασμού την Παρασκευή

Πόσο είναι το γ;..

Ποια κίνηση έγινε την Παρασκευή;..

Λόγοι - Αναλογίες

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
30. Σου δίνουμε το... λόγο μας	Λόγος δυο μεγεθών	75
31. Από το λόγο στην αναλογία... τι γλυκό!	Από τους λόγους στις αναλογίες	77
32. Αναλογία; Χιαστί θα βρω το x!	Αναλογίες	79
33. Εκφράζομαι...ακριβώς!	Σταθερά και μεταβλητά ποσά	81
34. Όταν ανεβαίνω... ανεβαίνεις	Ανάλογα ποσά	83
35. Η εύκολη λύση!	Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά	85
36. Μαζί δεν κάνουμε και χώρια δεν μπορούμε!	Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά	87
37. Παίρνοντας αποφάσεις!	Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά	89
38. Η απλή μέθοδος των τριών!	Η απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά	91
39. Είναι απλό όταν ξέρω τις τρεις τιμές!	Η απλή μέθοδος των τριών στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά	93
40. Συγκρίνω (πο)σωστά %	Εκτιμώ το ποσοστό	95
41. Παίζοντας με τα ποσοστά	Βρίσκω το ποσοστό	97
42. Ποσοστά της αλλαγής	Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την τελική τιμή	99
43. Από πού έρχομαι;	Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την αρχική τιμή	101
44. Για να μη λέμε πολλά ...	Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό	103
Όταν μιλάμε συμβολικά	*Ανακεφαλαίωση για τη θεματική ενότητα 3: Λόγοι - Αναλογίες*	105



Λόγοι – Αναλογίες

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τους λόγους και τις αναλογίες.

Ανάμεσα στις πρώτες μαθηματικές ιδέες των προϊστορικών ανθρώπων είναι οι αναλογίες και η συμμετρία. Οι πρωτόγονες ζωγραφιές στα σπήλαια μαρτυρούν την ύπαρξη αυτών των ιδεών. Οι ζωγραφιές αυτές έχουν σχεδιαστεί από επιδέξιους τεχνίτες οι οποίοι στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν το περιβάλλον απόδωσαν εικόνες ζώων, κυνηγών, γεωμετρικών σχημάτων κ.ά. σε μεγέθη όχι τυχαία αλλά σε αναλογία με την πραγματικότητα.

Όπως τότε, έτσι και σήμερα η μελέτη του περιβάλλοντος έδωσε στον άνθρωπο τα ερεθίσματα ώστε να συστηματοποιήσει τις σκέψεις του και να τις μετατρέψει σε γνώση. Η γνώση αύτη αποτελεί το εργαλείο που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για να ερμηνεύει το περιβάλλον του, αλλά ταυτόχρονα είναι και η βάση που του επιτρέπει να επιδρά σε αυτό.

Κεφάλαιο 30ό

Λόγος δυο μεγεθών

Σου δίνουμε το ... λόγο μας

Συγκρίνω μεγέθη.
Μελετώ τη σχέση δύο μεγεθών.
Εκφράζω τη σχέση δύο μεγεθών με λόγο.
Αναγνωρίζω τους αντίστροφους λόγους.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου Δοξάτου ερεύνησαν τις αιτίες της αυξημένης κίνησης στους δρόμους γύρω από το σχολείο τους. Βρήκαν τα στοιχεία για τον αριθμό των αυτοκινήτων και τον αριθμό των κατοίκων της πόλης τους για τα έτη 1980 και 2000 και τα κατέγραψαν στους παρακάτω πίνακες:

Έτος 1980

Αυτοκίνητα	345
Κάτοικοι	3.450

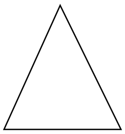
Έτος 2000

Αυτοκίνητα	850
Κάτοικοι	3.150

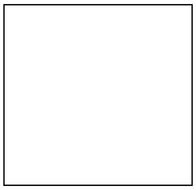
- Παρατηρώντας τα στοιχεία στους πίνακες, σχολιάστε στην ομάδα σας πόσο αυξήθηκε ο αριθμός των αυτοκινήτων μέσα στην τελευταία εικοσαετία και διατυπώστε τα συμπεράσματά σας.
- Συζητήστε τη σχέση του αριθμού των αυτοκινήτων με τον αριθμό των κατοίκων.
- Γιατί σήμερα υπάρχει η ανάγκη του σχολικού τροχονόμου; ....
....

Δραστηριότητα 2η

Συμπλήρωσε στους πίνακες την περίμετρο κάθε σχήματος:



Μήκος πλευράς ισόπλευρου τριγώνου (εκατοστά)	3
Περίμετρος τριγώνου (εκατοστά)	



Μήκος πλευράς τετραγώνου (εκατοστά)	5
Περίμετρος τετραγώνου (εκατοστά)	

- Πώς προκύπτει ο αριθμός στη δεύτερη γραμμή και στις δύο περιπτώσεις;...
- Η σχέση ανάμεσα στο μήκος της πλευράς και την περίμετρο μπορεί να εκφραστεί και ως κλάσμα. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία από τους παραπάνω πίνακες να γράψεις το κλάσμα αυτό για:
- Το τρίγωνο: .... το τετράγωνο: ....

Σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητο να συγκρίνουμε δύο μεγέθη και να μελετήσουμε τη σχέση τους:

Λόγος
Το αποτέλεσμα της σύγκρισης δύο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα ονομάζεται **λόγος.** Το κλάσμα αυτό έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο.

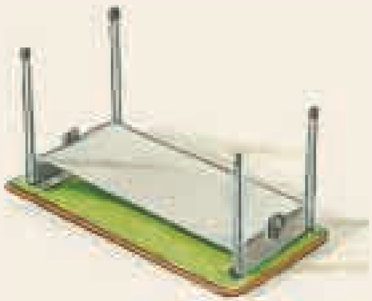
Παραδείγματα

Ο πύργος του Άιφελ έχει ύψος περίπου 300 μέτρα, ενώ ο Λευκός Πύργος περίπου 30 μέτρα.

Ο λόγος των υψών τους είναι $\frac{300}{30}$ ή $\frac{30}{3}$ ή 10.

(Δηλαδή ο πρώτος είναι 10 φορές ψηλότερος.)

Εφαρμογή 1η



Στην έκτη τάξη φοιτούν 28 μαθητές. Υπάρχουν 14 θρανία.
α. Ποιος είναι ο λόγος των μαθητών προς τα θρανία;
β. Ποιος είναι ο λόγος των θρανίων προς τους μαθητές;
Λύση - Απάντηση:

α. Ο λόγος $\frac{\text{μαθητές}}{\text{θρανία}}$ είναι —, δηλαδή απλοποιώντας $\frac{2}{1}$.

Με άλλα λόγια, αντιστοιχούν 2 μαθητές σε 1 θρανίο.

β. Ο λόγος $\frac{\text{θρανία}}{\text{μαθητές}}$ είναι —, δηλαδή απλοποιώντας $\frac{1}{2}$.

Με άλλα λόγια, αντιστοιχεί 1 θρανίο σε 2 μαθητές.

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι $\frac{2}{1}$ και $\frac{1}{2}$ είναι αντίστροφοι γιατί $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$ = ...

Εφαρμογή 2η

Τα παιδιά έκαναν μια μικρή έρευνα σχετικά με την κατανάλωση ενέργειας των αυτοκινήτων και βρήκαν ότι ένας πολύ καλός λόγος κατανάλωσης προς απόσταση είναι 1 λίτρο προς 25 χιλιόμετρα ($\frac{1}{25}$).

Ο Νικόλας ρώτησε τον μπαμπά του πόσα περίπου χιλιόμετρα κάνει το αυτοκίνητό τους με ένα ντεπόζιτο βενζίνη και εκείνος του είπε πως συνήθως με 50 λίτρα κάνει 400 χιλιόμετρα. Είναι οικονομικό το αυτοκίνητό τους;

Λύση:

Ο Νικόλας βρίσκει το λόγο $\frac{\textit{κατανάλωση (λίτρα)}}{\textit{απόσταση (χμ)}}$ του αυτοκινήτου τους: ——.

Απλοποιεί και βρίσκει ——.

Απάντηση: Το αυτοκίνητό τους έχει πολύ μικρότερο λόγο κατανάλωσης προς απόσταση (με 1 λίτρο ταξιδεύει μόνο 8 χιλιόμετρα, πολύ λιγότερα από τα 25 χιλιόμετρα).

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

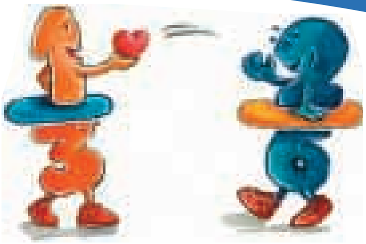
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **λόγος**. Μπορείς να εξηγήσεις τη σημασία του με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Ο λόγος εκφράζει τη σχέση δύο μεγεθών.	❒	❒
Σε κάθε λόγο ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή.	❒	❒
Οι λόγοι $\frac{7}{8}$ και $\frac{8}{7}$ είναι αντίστροφοι.	❒	❒

Κεφάλαιο 31ο

Από τους λόγους στις αναλογίες



Από το λόγο στην αναλογία ... τι γλυκό!

Συγκρίνω δύο λόγους.
Αναγνωρίζω την ισότητα δύο λόγων.
Σχηματίζω αναλογίες.

Δραστηριότητα 1η

Στο πλαίσιο του προγράμματος «Αγωγή Υγείας» οι μαθητές της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου Φαρκαδόνας ασχολήθηκαν με τη θερμιδική αξία των γλυκών. Διαβάζοντας τις ετικέτες σε δύο διαφορετικές σοκολάτες διαπίστωσαν ότι, η πρώτη σοκολάτα, βάρους 50 γραμμαρίων, δίνει 250 θερμίδες, ενώ η δεύτερη σοκολάτα, βάρους 100 γραμμαρίων, δίνει 500 θερμίδες.

- Συμπλήρωσε τον πίνακα όπως έκαναν τα παιδιά:

Βάρος σοκολάτας σε γραμμάρια	50	100
Θερμιδική αξία		

- Σύγκρινε τους δύο λόγους.
- Τι παρατηρείς;
- Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τη θερμιδική αξία (θερμίδες / γραμμάριο) στις δύο σοκολάτες; ....

Δραστηριότητα 2η

Για την ίδια εργασία τα παιδιά βρήκαν ότι το ένα γραμμάριο σοκολάτας έχει 5 θερμίδες και κατασκεύασαν τον πίνακα θερμίδων της σοκολάτας.

Βάρος σοκολάτας σε γραμμάρια	1	2	3	4	5
Θερμίδες	5				

- Συμπλήρωσε τον πίνακα
- Τι παρατηρείς στους λόγους που σχηματίζονται; ....
- Πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης γραμμής από τους αριθμούς της πρώτης; ....
....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές είναι αναγκαίο να μελετάμε τη σχέση (το λόγο) δύο μεγεθών σε διαφορετικές τιμές.

Αναλογία

Όταν συγκρίνοντας δύο λόγους διαπιστώσουμε ότι είναι ίσοι μεταξύ τους, λέμε ότι αποτελούν μια **αναλογία**.

Παραδείγματα

Οι λόγοι $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{10}$ σχηματίζουν αναλογία γιατί είναι ίσοι $\left(\frac{1}{5} = \frac{2}{10}\right)$

Για να σχηματίσω αναλογία από ένα λόγο, αρκεί να φτιάξω έναν άλλο λόγο που να είναι ίσος με τον πρώτο, όπως στα κλάσματα (πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας και τους δύο όρους με κάποιον αριθμό).

Εφαρμογή 1η

Από 9 πορτοκάλια βγάζουμε 3 ποτήρια χυμό. Από 18 πορτοκάλια βγάζουμε 6 ποτήρια χυμό. Οι λόγοι πορτοκαλιών προς ποτήρια χυμού στις δύο περιπτώσεις σχηματίζουν αναλογία;

Λύση:

Οι λόγοι $\frac{\text{πορτοκάλια}}{\text{ποτήρια με χυμό}}$ $\frac{9}{3}$, $\frac{18}{6}$ είναι ίσοι γιατί $\frac{9 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{\quad}{\quad}$.

Απάντηση: Οι λόγοι είναι ίσοι. Άρα σχηματίζουν αναλογία.

Εφαρμογή 2η

Για ένα πετυχημένο ρόφημα σοκολάτα η μαμά βάζει 1 κουταλιά κακάο και 2 κουταλιές ζάχαρη με μία κούπα γάλα. Για να έχουμε την ίδια αναλογία όταν έρθουν τρεις φίλοι μας, πόσες κουταλιές κακάο και πόσες κουταλιές ζάχαρη πρέπει να βάλουμε;

Λύση:

Ο λόγος $\frac{\text{κακάο}}{\text{ζάχαρη}}$ στο ρόφημα είναι $\frac{1}{2}$ για μία κούπα γάλα.

Για να φτιάξουμε ένα λόγο που να αποτελεί αναλογία με το $\frac{1}{2}$ για 3 κούπες γάλα, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους του πρώτου λόγου με το 3, δηλαδή $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{\quad}{\quad}$.

Απάντηση: Στις 3 κούπες γάλα αντιστοιχούν .... κουταλιές κακάο προς .... κουταλιές ζάχαρη.

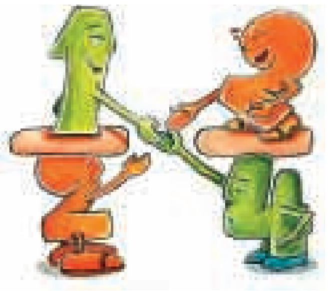
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αναλογία**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Η αναλογία εκφράζει την ισότητα δύο λόγων.	❒	❒
Σε κάθε αναλογία οι παρονομαστές είναι ίσοι.	❒	❒
Οι λόγοι $\frac{2}{9}$ *και* $\frac{9}{2}$ *αποτελούν αναλογία.*	❒	❒

Κεφάλαιο 32ο Αναλογίες

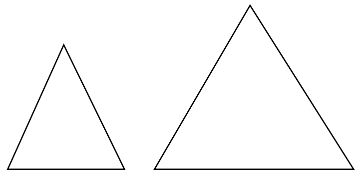


Αναλογία; «Χιαστί» θα βρω το x!

Βρίσκω τη σχέση των όρων της αναλογίας.
Υπολογίζω τον άγνωστο όρο της αναλογίας.

Δραστηριότητα 1η

- Συμπλήρωσε τους αριθμούς του πίνακα:



Πλευρά ισόπλευρου τριγώνου	1	2
Περίμετρος τριγώνου		

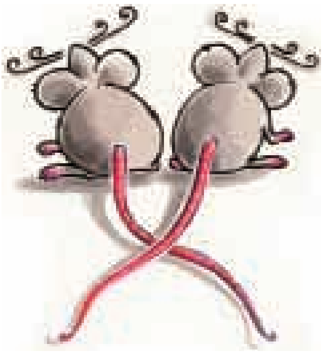
- Σύγκρινε τους δύο λόγους.
- Πώς προκύπτει ο δεύτερος λόγος από τον πρώτο;
- Πολλαπλασίασε τους αριθμούς που βρίσκονται στο ίδιο χρώμα.
- Σύγκρινε τα δύο γινόμενα που βρήκες. Τι παρατηρείς;

Δραστηριότητα 2η

Τρεις μήνες σύνδεση στο Internet κοστίζουν 27€. Οι δώδεκα μήνες κοστίζουν …….. €.

- Συμπλήρωσε τον αριθμό στον πίνακα:

Διάρκεια σύνδεσης	3	12
Κόστος	27	



- Μπορείς εύκολα να συγκρίνεις τους δύο λόγους;
- Δοκίμασε τη μέθοδο του πολλαπλασιασμού χιαστί.

……………………………………………………………………………………………………

- Τι παρατηρείς για τα δύο γινόμενα; ……………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε:

Σταυρωτά γινόμενα

Πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους μιας αναλογίας τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα. Τα γινόμενα αυτά λέγονται **σταυρωτά γινόμενα.**

Παραδείγματα

Στην αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ τα σταυρωτά γινόμενα

είναι: $4 \cdot 3 = 12$
$6 \cdot 2 = 12$

Εφαρμογή 1η

Ένας φούρναρης ανακάτεψε 36 κιλά αλεύρι σιταριού με 12 κιλά αλεύρι καλαμποκιού για να φτιάξει ψωμί ανάμεικτο. Την επόμενη μέρα, για να κάνει περισσότερα ψωμιά, ανακάτεψε 54 κιλά αλεύρι σιταριού με 18 κιλά αλεύρι καλαμποκιού.

Το ανάμεικτο ψωμί είχε την ίδια αναλογία συστατικών τις δύο μέρες;

Λύση:

Σχηματίζω τους λόγους: $\frac{\text{αλεύρι σιταριού}}{\text{αλεύρι καλαμποκιού}}$ είναι τη μια μέρα $\frac{36}{12}$ και την άλλη $\frac{54}{18}$.

Για να διαπιστώσω αν υπάρχει αναλογία σχηματίζω τα σταυρωτά γινόμενα:

$36 \cdot 18 =$ .... και $12 \cdot 54 =$ ....

Διαπίστωσα ότι είναι ίσα. Άρα $\frac{36}{12} = \frac{54}{18}$, δηλαδή οι λόγοι αποτελούν αναλογία.

Απάντηση: Το ανάμεικτο ψωμί και των δύο ημερών έχει την ίδια αναλογία συστατικών.

Εφαρμογή 2η

Για να φτιάξουμε καρυδόπιτα χρειαζόμαστε 12 αυγά και 8 κούπες ζάχαρη. Αν έχουμε μόνο 9 αυγά, πόσες κούπες ζάχαρη πρέπει να βάλουμε για να έχει το γλυκό την ίδια αναλογία;

Λύση:

Για να σχηματίσω αναλογία, πρέπει να έχω δύο ίσους λόγους. Ο λόγος $\frac{\text{αυγά}}{\text{ζάχαρη}}$ στη συνταγή είναι $\frac{12}{8}$. Αφού η ποσότητα της ζάχαρης είναι άγνωστη, τη συμβολίζω με x. Άρα ο λόγος των αυγών που έχω προς τη ζάχαρη που χρειάζομαι είναι $\frac{9}{x}$.

1. Σχηματίζω την αναλογία: $\frac{12}{8} = \frac{9}{x}$
2. Εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: $12 \cdot x = 8 \cdot 9$
3. Κάνω τον πολλαπλασιασμό: $12 \cdot x =$ ....
4. Λύνω την εξίσωση: $x =$ .... Άρα $x =$ ....

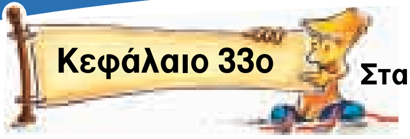
Απάντηση: Πρέπει να βάλουμε ...... κούπες ζάχαρη.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **σταυρωτά γινόμενα**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Δύο λόγοι αποτελούν αναλογία αν τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.	❒	❒
Σε δύο λόγους πάντοτε τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.	❒	❒



Κεφάλαιο 33ο

Σταθερά και μεταβλητά ποσά

Εκφράζομαι ... ακριβώς!

Μελετώ την έννοια του ποσού.
Διακρίνω τα ποσά από τις αντίστοιχες τιμές τους.
Συγκρίνω και αναγνωρίζω τα σταθερά και τα μεταβλητά ποσά.

Δραστηριότητα 1η

Στο Καρλόβασι, τα παιδιά της Στ΄ τάξης ανέβασαν ένα θεατρικό έργο. Στις πρόβες τα παιδιά σημείωσαν κάποιες φράσεις:
«Δώσε ένα κομμάτι από τη δόξα των προγόνων για να γίνει διπλή η περηφάνια μου»
«Με πόσο πάθος και αρετή πολέμησαν για λίγη ελευθερία!»
«Οι πολιορκητές απείχαν από το Μεσολόγγι 200 μέτρα»
«Οι πολιορκούμενοι είχαν τεράστια αποθέματα ανδρείας και θάρρους»
«Σαράντα πέντε άλογα και χίλιοι πεζοπόροι»
«Ταλαιπωρημένα άλογα και κουρασμένοι πεζοπόροι»

- Ποιες από τις φράσεις των παιδιών εκφράζουν ποσά (μπορούν να μετρηθούν);
- Τι παρατηρείς για τα άλογα και τους πεζοπόρους στις δύο τελευταίες φράσεις;
- Σκεφτείτε στην ομάδα σας και παρουσιάστε τρεις φράσεις που εκφράζουν ποσά και τρεις που δεν εκφράζουν ποσά.

Δραστηριότητα 2η

Όπως οι άνθρωποι, έτσι και τα ποσά έχουν όνομα κι επίθετο!
Κάποιοι άνθρωποι είναι τόσο γνωστοί που δεν χρειάζεται να πούμε το όνομα και το επίθετό τους για να καταλάβουμε σε ποιον αναφερόμαστε. Λέμε για παράδειγμα, ο Μπετόβεν, ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης. Με τον ίδιο τρόπο κάποια ποσά, όπως το βάρος, το μήκος, το πλάτος, το πλήθος, η θερμοκρασία κ.ά. είναι τόσο γνωστά ώστε δεν αναφέρονται αλλά εννοούνται. Έτσι, όταν λέμε «χίλιοι πεζοπόροι» εννοούμε «το πλήθος των πεζοπόρων ήταν χίλιοι».
Αντιστοίχισε τη φράση με το ποσό στα δεξιά και συμπλήρωσε την τιμή του.

ΦΡΑΣΗ
Σαράντα πέντε άλογα
Το θερμόμετρο δείχνει 9 βαθμούς
Ο Γιάννης είναι 1,55 μ.
Τα κύματα ήταν ένα μέτρο
Ένα κιλό ψωμί
Άνεμος 7 μποφόρ
Τρία μήλα
Τρία κιλά μήλα

ΠΟΣΟ	ΤΙΜΗ
Το ύψος του Γιάννη	
Το ύψος των κυμάτων	
Η θερμοκρασία	
Το πλήθος των αλόγων	
Η ένταση του ανέμου	
Το βάρος του ψωμιού	
Το βάρος των μήλων	
Το πλήθος των μήλων	

Διαβάστε τη φράση «Πάχυνα! Η ζυγαριά δείχνει πενήντα κιλά!» και βρείτε ποιο είναι το **ποσό** και ποια η **τιμή** του.
Ποσό...Τιμή...

Στην καθημερινή μας ζωή συναντάμε έννοιες που δεν είναι δυνατό να μετρηθούν και τις αντιλαμβανόμαστε υποκειμενικά – διαισθητικά (π.χ. καλό / κακό, γλυκό / πικρό, θαρραλέος / φοβητσιάρης κ.ά.). Συναντάμε όμως και έννοιες που μπορούν να μετρηθούν.

Ποσά

Οι έννοιες που μπορούν να μετρηθούν και επομένως να εκφραστούν με συγκεκριμένο αριθμό λέγονται **ποσά.**

Παραδείγματα

Η αίθουσά μας είναι 55 τετραγωνικά μέτρα. (το ποσό είναι το εμβαδό της αίθουσας)
Δουλεύω 8 ώρες την ημέρα. (χρονική διάρκεια)

Υπάρχουν ποσά **σταθερά**, δηλαδή έχουν πάντοτε την ίδια τιμή και ποσά **μεταβλητά**, τα οποία μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές.

Η απόσταση Αθήνας - Θεσσαλονίκης είναι σταθερό ποσό.
Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο σε 1 ώρα είναι μεταβλητό ποσό (εξαρτάται από την ταχύτητά του).

Εφαρμογή ***Διακρίνω τα σταθερά από τα μεταβλητά ποσά***

- Σκεφτείτε στην ομάδα και παρουσιάστε ποσά μεταβλητά και ποσά που παραμένουν σταθερά.
- Συζητήστε πώς μεταβάλλεται ένα ποσό (τι το επηρεάζει;).

Παράδειγμα απάντησης:

Στον πίνακα που ακολουθεί, σημειώνω στη στήλη **ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ** την τιμή για τα ποσά που παραμένουν **σταθερά** και για τα ποσά που **μεταβάλλονται** σημειώνω τον παράγοντα που τα επηρεάζει στη στήλη **ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ...**

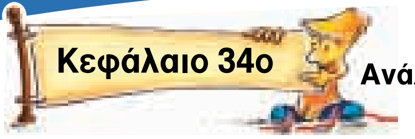
ΠΟΣΑ	ΣΤΑΘΕΡΟ/ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ	ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ...
Η θερμοκρασία που παγώνει το καθαρό νερό.	Σταθερό	..... βαθμοί	—
Το ύψος των κυμάτων της θάλασσας.	Μεταβλητό	—	την ένταση του ανέμου
Το ύψος του Ολύμπου.	Σταθερό	2.917 μ.	—
Το άθροισμα των γωνιών τετραγώνου.	Σταθερό	........°	—
Η κατανάλωση ενός αυτοκινήτου.	Μεταβλητό	—	την ταχύτητά του
Τα έσοδα του κυλικείου του σχολείου.	Μεταβλητό	—	τις πωλήσεις του
Ο λογαριασμός του τηλεφώνου.	Μεταβλητό	—	τις μονάδες που έγιναν
Το κόστος της τηλεφωνικής μονάδας.	Σταθερό	0,02 €	—
Η θερμοκρασία σήμερα.	Μεταβλητό	—	την ώρα, τον άνεμο κ.ά.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τις έννοιες **ποσό** και **τιμή**. Μπορείς να τις εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα; Δώσε παραδείγματα **σταθερών** και **μεταβλητών** ποσών.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Η Στ΄ τάξη έχει 18 μαθητές. Οι μαθητές είναι το ποσό.	❐	❐
*Ο Λευτέρης είναι **άριστος** μαθητής (εκφράζει ποσό).*	❐	❐
*Ο Λευτέρης είναι **12** ετών (εκφράζει ποσό).*	❐	❐
Σταθερά είναι τα ποσά που εκφράζονται με διάφορες τιμές.	❐	❐



Κεφάλαιο 34ο Ανάλογα ποσά

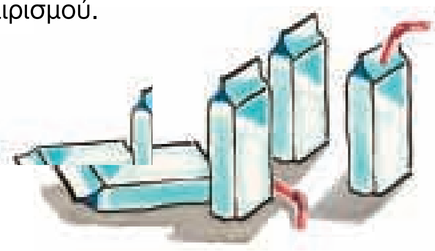
Όταν ανεβαίνω... ανεβαίνεις

Μελετώ την έννοια των ανάλογων ποσών.
Συγκρίνω ποσά.
Αναγνωρίζω τα ανάλογα ποσά.

Δραστηριότητα 1η

Για τις ανάγκες του σχολικού συνεταιρισμού τα παιδιά της Στ΄ τάξης θέλησαν να κάνουν πίνακα με τις ποσότητες και τις τιμές για τους χυμούς του κυλικείου του συνεταιρισμού.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ				
Ποσότητα χυμού (κουτιά)	1	2	4	8	16
Αξία σε €	2	4	8	16	32



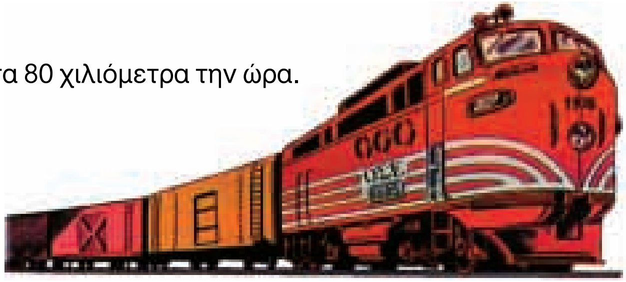
- Από τι εξαρτάται η αξία των χυμών σε κάθε περίπτωση;
- Πώς προκύπτει η αξία για κάθε ποσότητα;
- Σύγκρινε τους λόγους που σχηματίζονται. Τι παρατηρείς;

....

....

Δραστηριότητα 2η

Το τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα 80 χιλιόμετρα την ώρα.



Μπορείς να υπολογίσεις τα χιλιόμετρα που θα καλύψει σε 2, 3, 4, 5, 6 ... ώρες και να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί;

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ						
Χρόνος σε ώρες	1	2	3	4	5	6	7
Απόσταση σε χιλιόμετρα	80						

- Πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης γραμμής; ....
- Σύγκρινε τον πρώτο αριθμό κάθε γραμμής με κάποιον από τους αριθμούς που ακολουθούν. Πώς προκύπτει εκείνος από τον πρώτο; ....
- Σύγκρινε και τους αντίστοιχους λόγους $\frac{\text{χρόνος}}{\text{απόσταση}}$ ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές, όταν ένα ποσό μεταβάλλεται, προκαλεί μεταβολή σε ένα άλλο ποσό.

Ανάλογα ποσά

Δύο **ποσά** είναι **ανάλογα,** όταν οι τιμές του ενός προκύπτουν από τις τιμές του άλλου πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά με έναν σταθερό αριθμό.

Στα ανάλογα ποσά ο λόγος των τιμών τους διατηρείται σταθερός.

Παραδείγματα

Η αξία ενός υφάσματος είναι ανάλογη προς το μήκος του.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	1	2	3	4
Αξία υφάσματος σε €	5	10	15	20

Οι λόγοι τους είναι ίσοι: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = 0{,}2$

Κάποια ποσά, ενώ φαίνεται ότι εξαρτώνται το ένα από το άλλο, γιατί αυξάνονται ταυτόχρονα, δεν είναι ανάλογα. Τέτοια ποσά είναι η ηλικία και το ύψος ενός ανθρώπου ή η ηλικία και το βάρος του (ευτυχώς!). Μπορείτε να σκεφτείτε κι εσείς άλλα τέτοια ζευγάρια ποσών;

Εφαρμογή 1η

Από τα παρακάτω ζευγάρια ποσών, υπογραμμίζω αυτά που είναι ανάλογα:
Η πλευρά ενός τετραγώνου και η περίμετρός του.
Τα χρήματα που κερδίζουμε και τα χρήματα που ξοδεύουμε.
Η ποσότητα ενός προϊόντος και η χρηματική αξία του.
Η ώρα της ημέρας και η θερμοκρασία.

Λύση:

Η πλευρά ενός τετραγώνου και η περίμετρός του (είναι ανάλογα γιατί η τιμή της περιμέτρου προκύπτει πάντα ....)

Η ποσότητα ενός προϊόντος και η χρηματική αξία του (είναι ανάλογα γιατί η χρηματική αξία των προϊόντων προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε ....)

(Στην πραγματικότητα βέβαια, αν αγοράσω μεγάλη ποσότητα μπορεί να έχω έκπτωση!)

Εφαρμογή 2η

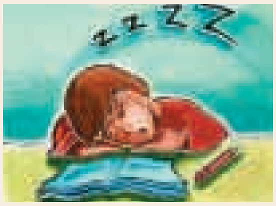
Η Ελένη για να διαβάσει 3 σελίδες κάνει 5 λεπτά. Μπορείς να βρεις πόσο θα κάνει για να διαβάσει 15 σελίδες, 30 σελίδες, 180 σελίδες αν κρατήσει τον ίδιο ρυθμό ανάγνωσης;

Λύση – Απάντηση:

Εξετάζω τα ποσά. Παρατηρώ ότι είναι ανάλογα (επειδή όταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται … η τιμή του ενός, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται … και η τιμή του άλλου).

Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός σελίδων	3	15	30	180
Χρόνος σε λεπτά	5	25	....	....



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **ανάλογα ποσά**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Το βάρος του τυριού και το βάρος του γάλακτος από το οποίο γίνεται είναι ποσά ανάλογα.	❒	❒
Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των τιμών τους είναι πάντα ίσοι.	❒	❒

Κεφάλαιο 35ο

Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά

Η εύκολη λύση!

Διακρίνω αν δύο ποσά είναι μεταξύ τους ανάλογα.
Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.
Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναλογίας.

Δραστηριότητα 1η

Η σχολική ομάδα μπάσκετ θέλει να προμηθευτεί αθλητικά μπλουζάκια. Βρήκαν ότι σε προσφορά τα 2 μπλουζάκια κοστίζουν 12 €. Πόσο θα κοστίσουν τα μπλουζάκια για όλη την ομάδα που αποτελείται από 8 παίκτες;

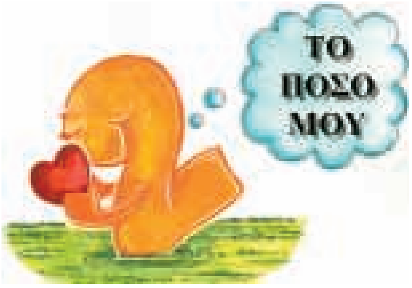
- Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος μπορώ εύκολα να υπολογίσω πόσο κάνουν τα 8 μπλουζάκια;
- Ξέροντας όμως την τιμή των 2 (πολλών) τι μπορώ να βρω;
- Πώς μπορώ μετά να βρω την τιμή των 8;
- Κάνε τις πράξεις στις κενές σειρές που ακολουθούν:
- ....
- ....
- ....

Δραστηριότητα 2η

Στο ίδιο πρόβλημα μπορούμε να εργαστούμε και με άλλο τρόπο:

- Φτιάχνουμε έναν πίνακα για να καταγράψουμε τα δεδομένα του προβλήματος.
- Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε εσύ τα ποσά και τις αντίστοιχες τιμές που μας δίνει το πρόβλημα.
- Την άγνωστη τιμή μπορείς να την ονομάσεις x.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	



- Σκέφτομαι τη σχέση ανάμεσα στα δύο ποσά. (Για διπλάσια μπλουζάκια, χρειάζομαι διπλάσια χρήματα ή όχι;)

  Τα ποσά .... και .... είναι ....

  Οι λόγοι τους ....

  Δηλαδή: = —— = ——

- Με ποια μέθοδο μπορείς να βρεις τον άγνωστο όρο σ' αυτή την αναλογία;

  ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να βρούμε την άγνωστη τιμή σε ένα πρόβλημα ανάλογων ποσών με διάφορους τρόπους:

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με διαίρεση) και στη συνέχεια βρίσκω την άγνωστη τιμή (με πολλαπλασιασμό) λέγεται αναγωγή στη μονάδα.

Παραδείγματα

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30€. Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα ύφασμα;

Λύση

Τα 5 μέτρα κοστίζουν 30 €
Το 1 μέτρο κοστίζει 30 : 5 = 6 €
Τα 12 μέτρα κοστίζουν 12 • 6 = 72 €

β) Σχηματίζοντα την αναλογία

Εργάζομαι ως εξής:

- Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.
- Εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα.
- Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.
- Σχηματίζω την αναλογία.
- Βρίσκω τον άγνωστο όρο της αναλογίας λύνοντας την εξίσωση.

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30 €. Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα;

Λύση

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	5	12
Αξία σε €	30	x

Τα ποσά μήκος υφάσματος και αξία είναι ανάλογα ποσά (το διπλάσιο μήκος έχει διπλάσια αξία).
Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των τιμών τους είναι ίσοι.
Σχηματίζω την αναλογία και βρίσκω τον άγνωστο όρο.

$\frac{5}{30} = \frac{12}{x}$ Άρα 5 • x = 30 • 12 επομένως 5 • x = 360
Άρα x = 360 : 5 x = 72

Εφαρμογή

Ένας αμπελουργός έκανε 600 κιλά κρασί από 1.800 κιλά σταφύλια. Την επόμενη χρονιά έκανε 800 κιλά κρασί. Πόσα κιλά σταφύλια είχε τη δεύτερη χρονιά;

Λύση:

α) Με αναγωγή στη μονάδα : Τα 600 κιλά κρασί γίνονται από .... κιλά σταφύλια
Το 1 κιλό κρασί γίνεται από 1.800 : 600 = ... κιλά σταφύλια
Τα 800 κιλά κρασί γίνονται 800 • ..... = ... κιλά σταφύλια

β) Με αναλογία:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Βάρος κρασιού σε κιλά	600	800
Βάρος σταφυλιών σε κιλά	1.800	x

Σχηματίζω την αναλογία και εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: $\frac{600}{1.800} = \frac{800}{x}$

Σχηματίζω την εξίσωση: 600 • x = 1.800 • 800

και τη λύνω 600 • x = 1.440.000 x = ... Άρα x = ...

Απάντηση: Τη δεύτερη χρονιά είχε .... κιλά σταφύλια.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αναγωγή στη μονάδα**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Αναγωγή στη μονάδα σημαίνει «βρίσκω την τιμή των πολλών».	❒	❒
Στην αναλογία τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.	❒	❒
Τα ανάλογα ποσά δεν έχουν πάντα ίσους λόγους.	❒	❒

Κεφάλαιο 36ο

Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά

Μαζί δεν κάνουμε και χώρια δεν μπορούμε!

Μελετώ την έννοια των αντίστροφων ποσών.
Συγκρίνω ποσά.
Αναγνωρίζω τα αντίστροφα ποσά.

Δραστηριότητα 1η

Τα παιδιά της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου Ν. Καλλικράτειας συγκέντρωσαν στο ταμείο τους 90 €. Με τα χρήματα αυτά θέλησαν να εμπλουτίσουν τη βιβλιοθήκη της τάξης τους. Στο τοπικό βιβλιοπωλείο υπήρχαν βιβλία με διάφορες τιμές. Γύρισαν στο σχολείο και έφτιαξαν έναν πίνακα με τις τιμές των βιβλίων και τις ποσότητες που θα μπορούσαν να αγοράσουν με τα 90 € που είχαν.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ				
Τιμή βιβλίου σε €	3	6	9	15	
Αριθμός βιβλίων	30				

- Μπορείς με την ομάδα σου να συμπληρώσεις τον πίνακα;
- Παρατηρήστε στον πίνακα τη σχέση του αριθμού των βιβλίων με την τιμή.
- Όταν η τιμή του βιβλίου γίνει διπλάσια, μπορώ να αγοράσω τον ίδιο αριθμό βιβλίων;
- Συζητήστε: Τι νομίζετε ότι ενδιαφέρει τα παιδιά για τη σχολική βιβλιοθήκη: η ποσότητα ή οι ακριβές εκδόσεις;

Δραστηριότητα 2η

Ο Διευθυντής, κάθε καλοκαίρι, για να ετοιμάσει το Σχολείο για την καινούρια σχολική χρονιά φροντίζει για το βάψιμό του. Για να βαφεί όλο το Σχολείο χρειάζονται 12 μέρες δουλειά. Πέρυσι ο ελαιοχρωματιστής ήταν μόνος και πήρε 12 μεροκάματα. Επειδή όμως οι εργασίες πρέπει να έχουν τελειώσει πριν αρχίσουν τα μαθήματα, φέτος ο Διευθυντής ζήτησε από άλλα 3 συνεργεία (με περισσότερους εργάτες) μια εκτίμηση για τις μέρες που θα χρειαστούν για το βάψιμο. Τις απαντήσεις τους τις κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός εργατών του συνεργείου	1	2	3	4
Ημέρες εργασίας	12	6	4	3

- Παρατήρησε τη σχέση αριθμού των εργατών προς τις ημέρες που θα εργάζονται για το βάψιμο.
- Προσπάθησε να βρεις τα μεροκάματα που θα χρειαστούν σε κάθε περίπτωση.

Μεροκάματα για κάθε συνεργείο	$1 \cdot 12 = 12$			

- Τι παρατηρείς; ....
- *Συζητήστε:* Αν έπρεπε να διαλέξετε εσείς, ποιο συνεργείο θα διαλέγατε;

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές, όταν ένα ποσό αλλάζει, προκαλεί αντίστροφη αλλαγή σε ένα άλλο ποσό.

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Αντιστρόφως ανάλογα ή **αντίστροφα** λέγονται δύο ποσά, στα οποία, όταν πολλαπλασιάζεται η τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, η αντίστοιχη τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό.

Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα με έναν σταθερό αριθμό.

Παραδείγματα

Ο αριθμός των εργατών είναι αντιστρόφως ανάλογος προς τις ημέρες εργασίας για ένα συγκεκριμένο έργο.

Αριθμός εργατών	1	2	3	4
Ημέρες εργασίας	12	6	4	3

Τα αντίστοιχα γινόμενά τους είναι ίσα:

$1 \cdot 12 = 12$, $2 \cdot 6 = 12$, $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 3 = 12$

Εφαρμογή 1η

Εξετάσετε τα παρακάτω ζευγάρια ποσών, και υπογραμμίστε τα αντιστρόφως ανάλογα:

Αριθμός εργατών και χρόνος εκτέλεσης ενός έργου.

Ταχύτητα αυτοκινήτου ώρες που ταξιδεύει για μια διαδρομή.

Άτομα και ποσότητα φαγητού που καταναλώνουν.

Κιλά και αξία σε οποιοδήποτε προϊόν.

Λύση:

Αριθμός εργατών και χρόνος εκτέλεσης ενός έργου. (Είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί με διπλάσιο αριθμό εργατών ο χρόνος εκτέλεσης ενός έργου μειώνεται στο μισό.)

Ταχύτητα αυτοκινήτου και ώρες που ταξιδεύει για μια διαδρομή. (Είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί με διπλάσια ταχύτητα οι ώρες που θα ταξιδεύει για να καλύψει μια διαδρομή μειώνονται στο μισό.)

Εφαρμογή 2η

Το ποσό που θα μοιράσει η ΛΟΤΤΑΡΙΑ σ' αυτή την κλήρωση στους νικητές είναι 60.000 €. Πόσα θα είναι τα κέρδη του νικητή, αν είναι ένας; Πόσα θα είναι τα κέρδη του καθενός, αν οι νικητές είναι δύο; Αν είναι τρεις ή τέσσερις;

Λύση:

α. Τα ποσά στο πρόβλημα είναι: Αριθμός νικητών, Κέρδη σε ΕΥΡΩ.

β. Εξετάζω τη σχέση των ποσών μεταξύ τους (τι συμβαίνει στα κέρδη όσο αυξάνεται ο αριθμός των νικητών;).

γ. Παρατηρώ ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα

δ. Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών και συμπληρώνω τις τιμές.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός νικητών	1	2	3	4
Κέρδη σε €	60.000	....	20.000	....

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αντιστρόφως ανάλογα** ή **αντίστροφα ποσά**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Δύο ποσά που αυξάνονται ταυτόχρονα είναι αντιστρόφως ανάλογα.	❐	❐
Στα αντίστροφα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσα.	❐	❐

Κεφάλαιο 37ο

Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Παίρνοντας αποφάσεις!

Διακρίνω αν δύο ποσά είναι μεταξύ τους αντιστρόφως ανάλογα.
Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.
Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο των ίσων γινομένων.

Δραστηριότητα 1η

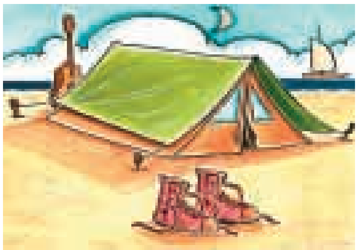
Το πρόγραμμα της παιδικής κατασκήνωσης προβλέπει ότι τα παιδιά θα τρώνε ένα παγωτό την ημέρα. Ο υπεύθυνος για το πρόγραμμα διατροφής της κατασκήνωσης, προμηθεύτηκε τόσα παγωτά, ώστε να επαρκέσουν για **20 ημέρες** για τους **15 μαθητές** που θα φιλοξενούσε η κατασκήνωση. Αν έρθουν **25 μαθητές** για **πόσες ημέρες** θα έχουν παγωτό;

- Μπορώ να βρω εύκολα για πόσες ημέρες θα έχουν παγωτό τα 25 παιδιά; ....
- Αν στην κατασκήνωση, αντί για 15 παιδιά, πήγαινε **μόνο 1 παιδί**, μπορώ να υπολογίσω για πόσες μέρες θα είχε παγωτά (αν έτρωγε ένα την ημέρα);
- Με τον τρόπο αυτό βρίσκω πόσα είναι τα παγωτά. Στη συνέχεια μπορώ να βρω για πόσες ημέρες θα επαρκέσουν για τους 25 μαθητές.
- **Κάνω τις πράξεις**: Αφού προβλεπόταν 15 παιδιά να έχουν παγωτά για 20 μέρες,

  1 παιδί θα έχει παγωτά για ……………………. Άρα τα παγωτά είναι ....

  Όμως τα παιδιά είναι 25 και *θα μοιραστούν* τα παγωτά.

  Έτσι θα έχουν παγωτά για...



Δραστηριότητα 2η

- Στο ίδιο πρόβλημα εργάζομαι με άλλο τρόπο:
- Βρίσκω τα ποσά. Μπορείς να τα ονομάσεις;
- Συμπλήρωσε τα ποσά και τις αντίστοιχες τιμές που μας δίνει το πρόβλημα.

Την άγνωστη τιμή τη συμβολίζω με x.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	

Εξετάζω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά **αριθμός μαθητών** και **αριθμός ημερών ....** (δηλαδή όταν οι μαθητές γίνουν περισσότεροι, τα παγωτά επαρκούν για περισσότερες ή για λιγότερες ημέρες;) Διακρίνω, ότι τα ποσά **αριθμός μαθητών** και **αριθμός ημερών** είναι μεταξύ τους ....

Τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι ....

Δηλαδή: .... • .... = ... • ....

- Μπορείς τώρα να βρεις τον άγνωστο όρο αυτής της ισότητας;

  ....

  ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να βρούμε την άγνωστη τιμή σε ένα πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά με δύο τρόπους:

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα με ποσά αντιστρόφως ανάλογα, βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με πολλαπλασιασμό) και στη συνέχεια διαιρώντας βρίσκω την άγνωστη τιμή, λέγεται **αναγωγή στη μονάδα.**

Παραδείγματα

Οι 3 εργάτες τελειώνουν ένα έργο σε 20 ημέρες. Σε πόσες ημέρες τελειώνουν το ίδιο έργο οι 10 εργάτες;

Λύση

Οι 3 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 20 ημέρες.
Ο 1 εργάτης τελειώνει το έργο σε 20 • 3 = 60 ημέρες
Οι 10 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 60 **:** 10 = 6 ημέρες

β) Σχηματίζοντας πίνακα ποσών και τιμών

Εργάζομαι ως εξής:
- Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.
- Εξετάζω αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.
- Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.
- Σχηματίζω την εξίσωση που δημιουργείται από τα ίσα γινόμενα των τιμών.
- Βρίσκω τον άγνωστο όρο, λύνοντας την εξίσωση.

Στο προηγούμενο παράδειγμα εργαζόμαστε με πίνακα.
Φτιάχνουμε τον πίνακα ποσών και τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός εργατών	3	10
Ημέρες εργασίας	20	x

Τα ποσά **αριθμός εργατών** και **ημέρες εργασίας** είναι **αντιστρόφως ανάλογα** (ο διπλάσιος αριθμός εργατών τελειώνει το έργο στις μισές μέρες).
Άρα τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα.
Σχηματίζω τα γινόμενα και βρίσκω τον άγνωστο όρο.
10 • x = 20 • 3
10 • x = 60   επομένως x = 60 : 10   **Άρα x = 6 ημέρες**

Εφαρμογή

Τα 12 λεωφορεία για τη μεταφορά των μαθητών κάνουν 2 δρομολόγια. Τα 4 λεωφορεία χάλασαν. Πόσα δρομολόγια θα κάνουν τα 8 λεωφορεία που έμειναν;

Λύση:

α) με αναγωγή στη μονάδα: Τα 12 λεωφορεία κάνουν 2 δρομολόγια
Το 1 λεωφορείο θα έκανε 12 • 2 = 24 δρομολόγια
Τα 8 λεωφορεία θα κάνουν 24 **:** 8 = 3 δρομολόγια

β) με πίνακα τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός λεωφορείων	12	8
Δρομολόγια	2	x

Σχηματίζω την εξίσωση των ίσων γινόμενων: 8 • x = 12 • 2
και τη λύνω   8 • x = 24   επομένως x = ...   Άρα x = ...

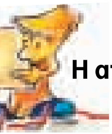
Απάντηση: Τα 8 λεωφορεία θα κάνουν ..... δρομολόγια.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αναγωγή στη μονάδα σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Αναγωγή στη μονάδα σημαίνει: βρίσκω την τιμή του ενός.	❐	❐
Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.	❐	❐
Τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά έχουν πάντα ίσους λόγους.	❐	❐



Η απλή μέθοδος των τριών!

Λύνω τα προβλήματα των ανάλογων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.

Δραστηριότητα

Τα παιδιά της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου της Αντιμάχειας στα πλαίσια ενός ευρωπαϊκού προγράμματος απέκτησαν φίλους σε ένα σχολείο στη Σκοτία. Αποφάσισαν να τους στείλουν 12 μουσικά CD με ελληνική μουσική. Στα μαγαζιά του νησιού τα 5 μουσικά CD κοστίζουν 30 €. Πόσα χρήματα θα χρειαστούν;

- Ποια είναι τα ποσά;..
- Πως μεταβάλλονται; ....
- Είναι τα ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα;...
- Αφού διακρίνω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά, προχωρώ στη λύση.

Ξέρω να λύνω πρόβλημα ανάλογων ποσών σχηματίζοντας την αναλογία:

$1^{ο}$ **βήμα**: Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός CD		
Αξία σε €		x

$2^{ο}$ **βήμα**: Σχηματίζω την αναλογία: $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{x}$

$3^{ο}$ **βήμα**: Εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα : ....

$4^{ο}$ **βήμα**: Λύνω την εξίσωση: x = ...

Παρατηρώ την εξίσωση που σχημάτισα προηγουμένως **x = 30 • 12 : 5** (ή $x = 30 \cdot \frac{12}{5}$) και τη θέση των αριθμών στον πίνακα ποσών και τιμών. Διαπιστώνω ότι το άγνωστο ποσό (**x**) είναι ίσο με τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα που σχηματίζουν οι αριθμοί δίπλα του αλλά αντεστραμμένο: $x = 30 \cdot \frac{12}{5}$

Στην παρατήρηση αυτή στηρίχθηκε μια άλλη μέθοδος για να λύνουμε προβλήματα ποσών, όπου γνωρίζουμε τρεις τιμές και ψάχνουμε την τέταρτη. Η μέθοδος αυτή ονομάστηκε **απλή μέθοδος των τριών**.

Λύνω το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών:

$1^{ο}$ βήμα: Κάνω **κατάταξη** (τακτοποιώ τα ποσά, προσέχοντας τώρα να βάλω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

τα **5 CD** κοστίζουν **30 €**
τα **12 CD** κοστίζουν **x**;

$2^{ο}$ βήμα: Ελέγχω ότι τα ποσά είναι ανάλογα

$3^{ο}$ βήμα: Εφαρμόζω και λύνω $\mathbf{x} = 30 \cdot \frac{12}{5}$ δηλαδή $\mathbf{x} = \frac{30 \cdot 12}{5}$ άρα $\mathbf{x} = \frac{360}{5}$

Άρα **x** = 72 €

Από την παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώνουμε ότι, για να λύσουμε προβλήματα ανάλογων ποσών, υπάρχει και μια τρίτη μέθοδος (εκτός από την αναγωγή στη μονάδα και την αναλογία), η απλή μέθοδος των τριών.

Απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά

Για να βρω την άγνωστη τιμή σε προβλήματα ανάλογων ποσών με την **απλή μέθοδο των τριών**, ακολουθώ τρία βήματα:

1ο βήμα: Κατάταξη (βάζω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

2ο βήμα: Σύγκριση ποσών (εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα)

3ο βήμα: Λύση (πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το x επί το κλάσμα των άλλων δύο αριθμών αντεστραμμένο)

Παραδείγματα

τα **3 τετράδια** κοστίζουν **2 €**
τα **27 τετράδια** κοστίζουν **x €**;

$x = 2 \cdot \frac{27}{3}$ δηλαδή $x = \frac{2 \cdot 27}{3}$

άρα $x = \frac{54}{3}$ άρα $x = 18$ €

Εφαρμογή

Ο καυστήρας της κεντρικής θέρμανσης του σχολείου καταναλώνει 54 λίτρα πετρέλαιο σε 3 ώρες. Πόσες ώρες θα λειτουργεί το καλοριφέρ αν στη δεξαμενή υπάρχουν ακόμη 378 λίτρα πετρελαίου;

Λύση:

1ο βήμα: Κάνω την κατάταξη.

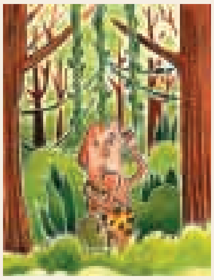
Σε **3** ώρες καίει **54** λίτρα
Σε **x** ώρες καίει **378** λίτρα;

2ο βήμα: Εξετάζω τα ποσά. Είναι ανάλογα.

3ο βήμα: Λύνω το πρόβλημα:

$x = 3 \cdot \frac{378}{54}$ δηλαδή $x = \frac{3 \cdot 378}{54}$

άρα $x = \frac{\quad}{\quad}$ άρα x = ... ώρες



Απάντηση: Θα λειτουργεί για ...... ώρες.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

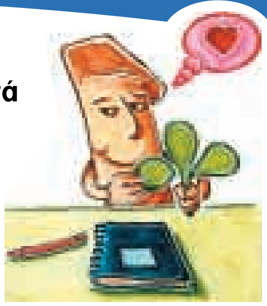
Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε την **απλή μέθοδο των τριών σε ποσά ανάλογα**. Μπορείς να την εξηγήσεις με δικά σου λόγια;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Τα προβλήματα των ανάλογων ποσών λύνονται μόνο με την «απλή μέθοδο».	❒	❒
Με όποια μέθοδο κι αν λύσω το πρόβλημα το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.	❒	❒
Στην κατάταξη στην απλή μέθοδο των τριών προσέχω τα ποσά του ίδιου είδους να είναι σε στήλες.	❒	❒

Κεφάλαιο 39ο

Η απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά



Είναι απλό όταν ξέρω τις τρεις τιμές!

Λύνω τα προβλήματα των αντίστροφων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.

Δραστηριότητα

Για να υδροδοτήσουν ένα νέο οικισμό, οι μηχανικοί της εταιρείας ύδρευσης υπολόγισαν ότι θα χρειαστούν 180 σωλήνες των 5 μέτρων. Στην αποθήκη της εταιρείας υπάρχουν μόνο σωλήνες των 3 μέτρων. Πόσους τέτοιους σωλήνες θα χρειαστούν;

- Για να καλύψουμε την ίδια απόσταση με μικρότερους σωλήνες θα χρειαστούμε περισσότερους ή λιγότερους;..

- Είναι τα ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα;
- Αφού διερευνήσω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά, προχωρώ στη λύση.

Ξέρω να λύνω πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά σχηματίζοντας τον πίνακα τιμών και εφαρμόζοντας τα ίσα γινόμενα:

- Στον πίνακα ποσών και τιμών συμπληρώνω τις τιμές:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μήκος σωλήνα		
Ποσότητα σωλήνων		x

- Εξετάζω τα γινόμενα των τιμών. Αυτά είναι : ....
- Εφαρμόζω τα ίσα γινόμενα: .... • x = ...
- Λύνω την εξίσωση: x = ...

Λύνω το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών:

Όπως στα ανάλογα ποσά, έτσι και στα αντιστρόφως ανάλογα γνωρίζουμε τρεις τιμές και ψάχνουμε την τέταρτη. Η **απλή μέθοδος των τριών** που εφαρμόζεται στα προβλήματα με ανάλογα ποσά μπορεί να εφαρμοστεί και στα αντιστρόφως ανάλογα μετά την κατάταξη των ποσών του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο.

Με μια διαφορά:

Το άγνωστο ποσό το βρίσκουμε πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα που σχηματίζουν οι αριθμοί δίπλα του όπως είναι (όχι αντεστραμμένο)

1ο βήμα: Κάνω κατάταξη (τακτοποιώ τα ποσά, προσέχοντας τώρα να βάλω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

όταν το μήκος του σωλήνα είναι **5 μέτρα** χρειάζονται **180 σωλήνες**
όταν το μήκος του σωλήνα είναι **3 μέτρα** χρειάζονται **x σωλήνες;**

2ο βήμα: Ελέγχω τα ποσά και διακρίνω ότι είναι αντιστρόφως ανάλογα

3ο βήμα: Λύνω $x = 180 \cdot \frac{5}{3}$ δηλαδή $x = \frac{180 \cdot 5}{3}$ άρα $x = \frac{900}{3}$ άρα $x = 300$

Από την παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώνουμε ότι, για να λύσουμε προβλήματα αντίστροφων ποσών, υπάρχει και μια τρίτη μέθοδος (εκτός από την αναγωγή στη μονάδα και τον πίνακα ποσών και τιμών), η απλή μέθοδος των τριών.

Απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά

Για να βρω την άγνωστη τιμή σε προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών με την **απλή μέθοδο των τριών**, ακολουθώ τρία βήματα:

1ο βήμα: Κατάταξη (βάζω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

2ο βήμα: Σύγκριση ποσών (εξετάζω αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα)

3ο βήμα: Λύση (πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το x επί το κλάσμα των άλλων δύο αριθμών)

Παραδείγματα

οι **3 εργάτες** τελειώνουν σε **6 ημ.**
οι **9 εργάτες** τελειώνουν σε **x ημ.**;

$x = 6 \cdot \frac{3}{9}$ δηλαδή $x = \frac{6 \cdot 3}{9}$

άρα $x = \frac{18}{9}$ άρα $x = 2$ ημέρες

Δεν πρέπει να ξεχνώ **στο τέλος να ελέγχω την απάντηση**. Αφού τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, οι περισσότεροι εργάτες χρειάζονται λιγότερες μέρες. **Αυτό που βρήκα είναι λογικό**;

Εφαρμογή

Για να καλύψουν το πάτωμα του γυμναστηρίου με σανίδες, οι τεχνίτες υπολόγισαν ότι θα χρειαστούν 180 σανίδες μήκους 2,5 μέτρων. Τι ποσότητα θα πρέπει να αγοράσουν, αν χρησιμοποιήσουν σανίδες μήκους 2 μέτρων (και ίδιου πλάτους);

Λύση:

1ο βήμα: Κάνω την κατάταξη

όταν το μήκος των σανίδων είναι .... χρειάζονται ....
όταν το μήκος των σανίδων είναι .... χρειάζονται **x σανίδες;**

2ο βήμα: Εξετάζω τα ποσά: ....

3ο βήμα: Λύνω το πρόβλημα x = ...

....

....

Ελέγχω: Με μικρότερες σανίδες θα χρειαστούν περισσότερες από 180 ή λιγότερες;

Απάντηση: Θα χρειαστούν .... σανίδες.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε την **απλή μέθοδο των τριών σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα**. Μπορείς να την εξηγήσεις με δικά σου λόγια;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Τα προβλήματα των αντίστροφων ποσών λύνονται με τρεις τρόπους.	❒	❒
Στα αντίστροφα ποσά, για να βρω το x πολλαπλασιάζω τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα των άλλων δύο αντεστραμμένο.	❒	❒
Στην κατάταξη προσέχω τα ποσά του ίδιου είδους να είναι σε στήλες.	❒	❒

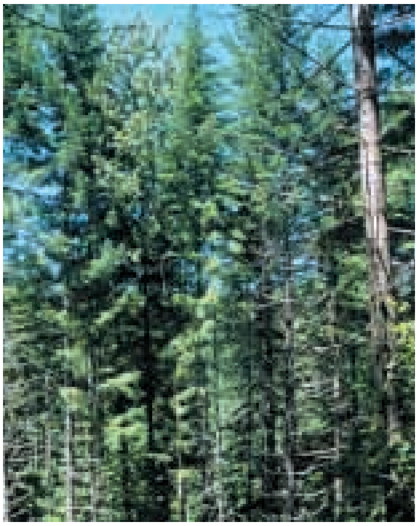
Κεφάλαιο 40ο

Εκτιμώ το ποσοστό

Συγκρίνω (πο)σωστά %

Κατανοώ ότι ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτ
Μετατρέπω τα κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100.
Αντιλαμβάνομαι το σύνολο ως το 100% και εκτιμώ το ποσοστό.

Δραστηριότητα 1η



Η Ε΄ και η Στ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου Θυμιανών συμμετείχαν στη δενδροφύτευση που οργάνωσε ο δήμος Χίου με σκοπό να αναδασώσει τις καμένες εκτάσεις στο νησί. Τα παιδιά της Ε' τάξης φύτεψαν 25 δεντράκια, από τα οποία φύτρωσαν τα 20. Τα παιδιά της Στ΄ τάξης φύτεψαν 50 δέντρα, από τα οποία φύτρωσαν τα 30. Ποια τάξη είχε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας στη δενδροφύτευση;

- Για να απαντήσουμε στην ερώτηση τι πρέπει να λάβουμε υπόψη;
- Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας είχε η τάξη της οποίας φύτρωσαν περισσότερα δέντρα; Εξηγήστε γιατί.

Δραστηριότητα 2η

Στον αγώνα μπάσκετ της Στ΄ τάξης μεταξύ του 21ου και του 109ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, το τελικό σκορ ήταν 57 - 61. Οι δυο καλύτεροι παίκτες των δύο ομάδων ήταν ο Αχιλλέας Ι. κι ο Σωτήρης Κ. Ο Αχιλλέας πέτυχε 17 καλάθια στις 25 προσπάθειες ενώ ο Σωτήρης πέτυχε 16 καλάθια στα 20. Ποιος είχε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

- Μπορείς εύκολα συγκρίνοντας τις επιτυχημένες βολές των δύο παικτών να αποφασίσεις ποιος ήταν καλύτερος παίκτης; ....

  ....

- Σχημάτισε τους λόγους επιτυχιών προς προσπάθειες για κάθε παίκτη.

$$\text{Αχιλλέας} = \frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}} = \frac{\quad}{\quad} \quad \text{και} \quad \text{Σωτήρης} = \frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}} = \frac{\quad}{\quad}$$

- Γιατί δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τους παραπάνω λόγους εύκολα;

  ....

- Προσπάθησε να κάνεις τους λόγους ομώνυμα κλάσματα: —— , ——
- Είναι εύκολο να συμπεράνεις τώρα ποιος είχε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ένας εύκολος και κοινός τρόπος σύγκρισης του *μέρους προς το σύνολο* είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα κλάσμα με παρονομαστή το 100.

Ποσοστά

Ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτού (**ο λόγος του μέρους προς όλο το ποσό**).

Ποσοστό στα 100 είναι ένα μέρος του ποσού που έχει τιμή 100 και γράφεται με κλάσμα που έχει αριθμητή το μέρος και παρονομαστή το 100 ή με το **σύμβολο %**.

Παραδείγματα

Το τεστ στα Αγγλικά είχε 20 ερωτήσεις.
Μαργαρίτα: Είχα ποσοστό επιτυχίας 19 στα 20 (19/20)
Βασίλης: Είχα ποσοστό επιτυχίας 17 στα 20 (17/20)

Η δασκάλα τους ανακοινώνει τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στα 100 :
– Μαργαρίτα, είχες 95%.
– Βασίλη, εσύ είχες 85%

Για μικρό μέρος μεγάλου ποσού χρησιμοποιούμε κλάσμα με παρονομαστή το 1.000 και το λέμε **ποσοστό στα χίλια** (‰).

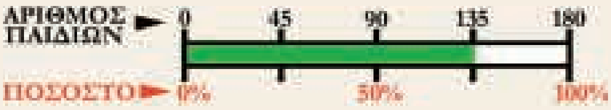
Εφαρμογή 1η **Υπολογισμός ποσοστού με το νου**

Μετά την επίσκεψη του σχολείου στον κινηματογράφο τα παιδιά έκαναν μια μικρή έρευνα για το αν άρεσε η ταινία. Από τα 180 παιδιά τα 135 απάντησαν ότι τους άρεσε. Πόσο ήταν το ποσοστό στα 100 (%) των παιδιών στα οποία άρεσε η ταινία;

Λύση - Απάντηση:

Σκέφτομαι ότι τα 180 παιδιά είναι το 100% αυτών που ρωτήθηκαν.

Υπολογίζω με το νου ότι τα μισά, δηλαδή τα 90, είναι το 50% και τα μισά από αυτά, δηλαδή τα 45, είναι το 25%. Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να χρωματίσουμε μέχρι τον αριθμό 135 και να συμπληρώσουμε το αντίστοιχο ποσοστό.



Εφαρμογή 2η

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται η αρχική τιμή ενός προϊόντος, που είναι 400 € και 3 τελικές τιμές από τις οποίες καθεμία προκύπτει μετά την έκπτωση. Μπορείς να υπολογίσεις με το νου πόσο στα 100 (%) είναι η έκπτωση σε κάθε περίπτωση;

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΚΠΤΩΣΗΣ (%)	ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ
400		200
400		300
400		350

Λύση: Τα 400 € είναι το 100% της τιμής. Τα μισά (200 €) είναι το 50% της τιμής. Άρα, όταν η τελική τιμή είναι 200 €, η έκπτωση είναι 50%. Τα 100 € αντιστοιχούν στο $\frac{1}{4}$ των 400 €, δηλαδή στο 25%. Στη β΄ περίπτωση πληρώνουμε 100 € λιγότερα από την αρχική τιμή. Άρα η έκπτωση είναι 25%. Με την ίδια λογική στη γ΄ περίπτωση τα 50 € λιγότερα που πληρώνουμε είναι το $\frac{1}{8}$ των 400 € (το μισό του 25%). Άρα η έκπτωση είναι 12,5%.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **ποσοστό**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Το ποσοστό είναι ένας λόγος.	❒	❒
Τα ποσοστά τα χρησιμοποιούμε μόνο για εκπτώσεις.	❒	❒

Κεφάλαιο 41ο

Βρίσκω το ποσοστό

Παίζοντας με τα ποσοστά

Κατανοώ τη σχέση μεταξύ κλάσματος, ποσοστού και δεκαδικού αριθμού.
Εκφράζω ποσοστό στα 100 (%) με κλάσμα και δεκαδικό αριθμό.
Βρίσκω το ποσοστό ενός ποσού όταν ξέρω το ποσοστό στα 100 (%).

Δραστηριότητα 1η

- Στη διπλανή εικόνα βλέπεις ένα βάτραχο. Κάτω από την εικόνα υπάρχει η ένδειξη 0,5 x. Τι νομίζεις ότι σημαίνει;

Στα φωτοαντιγραφικά μηχανήματα, για να μεγεθύνεις ή να σμικρύνεις το φωτοαντίγραφο πρέπει να αλλάξεις την ένδειξη του ποσοστού.

- Ποια ένδειξη θα έβαζες για να πάρεις μια εικόνα που θα είναι μισή από την αρχική σου εικόνα;

- Μετρώντας τις διαστάσεις των δύο εικόνων, βρίσκουμε τη σχέση τους $\frac{\text{τελικό μέγεθος}}{\text{αρχικό μέγεθος}} = \frac{10 \text{ εκ.}}{20 \text{ εκ.}} = \frac{\quad}{100} = 0,.....$

- Η τελική εικόνα είναι το .... % της αρχικής.

Δραστηριότητα 2η

Στις 4/7/2004 η Εθνική Ομάδα ποδοσφαίρου της Ελλάδας έπαιξε στον τελικό του Ευρωπαϊκού Πρωταθλήματος και στέφθηκε πρωταθλήτρια Ευρώπης. Όλοι οι Έλληνες πανηγύρισαν την κατάκτηση του κυπέλλου, λίγοι όμως ήταν αυτοί που είχαν την ευκαιρία να βρίσκονται στο στάδιο. Το στάδιο «Ντα Λουζ» της Λισαβόνας χωρούσε 65.000 άτομα και ήταν πλήρες. Από το σύνολο των εισιτηρίων, καθεμία από τις ομάδες πήρε το 25%, ενώ τα υπόλοιπα είχαν προπωληθεί. Πόσα ήταν τα εισιτήρια που είχε η ελληνική ομάδα στη διάθεσή της;

- Πώς θα βρεις το μέρος (25%) όταν ξέρεις το σύνολο, (65.000); ....

....

- Να εκφράσεις τώρα το ποσοστό 25% με τη δεκαδική του μορφή: ....

- Κάνε τώρα την ίδια πράξη με τον δεκαδικό αριθμό: ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το ποσοστό με πολλούς τρόπους.

Ποσοστό ενός ποσού

Το ποσοστό στα εκατό (%) μπορεί να γραφεί ως **δεκαδικός αριθμός,** που δηλώνει εκατοστά.
Τα **κλάσματα** είναι δυνατό να μετατραπούν σε ποσοστά αν τα μετατρέψουμε στα ισοδύναμά τους εκατοστιαία ή αν κάνουμε τη διαίρεση ανάμεσα στους όρους (με προσέγγιση εκατοστού).

Παραδείγματα

$\mathbf{45\%}\left(=\frac{45}{100}\right) = 45 : 100 = \mathbf{0{,}45}$

$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{20}{100} = \mathbf{20\%}$ ή

$\frac{1}{5} = 1 : 5 = \mathbf{0{,}20 = 20\%}$

Βρίσκω το ποσοστό σημαίνει βρίσκω το μέρος του όλου.

Το 15% του 70 είναι:

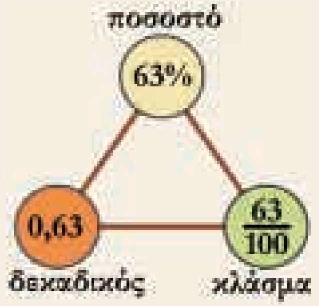
$\frac{15}{100} \cdot 70 = \mathbf{10{,}5}$ ή $0{,}15 \cdot 70 = \mathbf{10{,}5}$

Εφαρμογή 1η

Εκφράζω το ποσό 63 λεπτά ως ποσοστό του ΕΥΡΩ.
Το γράφω με τη μορφή κλάσματος, με τη μορφή δεκαδικού και με το σύμβολο του ποσοστού.

Λύση - Απάντηση:

- με μορφή κλάσματος: $\frac{63}{100}$
- με μορφή δεκαδικού: ....
- με σύμβολο ποσοστού: 63%



Εφαρμογή 2η

Στη συσκευασία ενός γιαουρτιού αναγράφεται: «Γιαούρτι από αγελαδινό γάλα. Βάρος 200 γραμμάρια, λιπαρά 3%». Τρώγοντας το συγκεκριμένο γιαούρτι πόσα λιπαρά θα καταναλώσω;

Λύση:

Πρέπει να βρω το ποσοστό των λιπαρών που περιέχονται στα 200 γραμμάρια γιαουρτιού. Πολλαπλασιάζω τα 200 γρ. με το κλάσμα $\frac{3}{100}$ (ή με τον δεκαδικό 0,03) και βρίσκω $\frac{600}{100}$ ή 6 γρ.

Μπορείς να λύσεις το πρόβλημα με άλλο τρόπο σκέψης.

Απάντηση: Θα καταναλώσω 6 γραμμάρια λιπαρά.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό εκφράσαμε τα ποσοστά με τρεις τρόπους και μάθαμε να βρίσκουμε το **ποσοστό ενός ποσού**. Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Το ποσοστό μπορεί να εκφραστεί μόνο με κλάσμα.	❒	❒
Η μετοχή κέρδισε 0,06 της αξίας της, δηλαδή 6%.	❒	❒
Ο ένας στους τέσσερις $\left(\frac{1}{4}\right)$ *είναι το 25% του συνόλου.*	❒	❒

Κεφάλαιο 42ο

Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την τελική τιμή

Ποσοστά της αλλαγής

Κατανοώ τη σχέση μεταξύ αρχικής τιμής, ποσοστού και τελικής τιμής. Λύνω προβλήματα γνωρίζοντας την αρχική τιμή και το ποσοστό και ζητώντας την τελική τιμή.

Δραστηριότητα 1η

Καθημερινά ακούμε ή διαβάζουμε στα Μ.Μ.Ε. πληροφορίες, όπως:

– Η τιμή του ψωμιού αυξήθηκε τον τελευταίο χρόνο κατά 3%.
– Οι τιμές των υπολογιστών μειώθηκαν από πέρυσι κατά 8%.
– Η τουριστική κίνηση στη Σάμο ήταν φέτος αυξημένη κατά 12%.

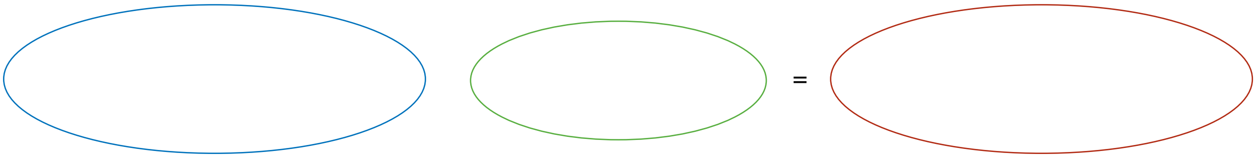
- Τι νομίζεις ότι χρειάζεται να γνωρίζει κάποιος για να μας δώσει αυτές τις πληροφορίες;
- ....
- Αν εκτός από τις παραπάνω πληροφορίες γνωρίζεις και τις περσινές τιμές, μπορείς να υπολογίσεις τις φετινές τιμές; ....
- Αν ναι, με ποιον τρόπο ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

Η Αγγελική θέλει να αγοράσει καινούριο υπολογιστή. Βρήκε έναν στο διαφημιστικό φυλλάδιο κάποιου καταστήματος με 550 €. Προσέχει όμως ότι, στην άκρη του φυλλαδίου, γράφει ότι στην τιμή δεν συμπεριλαμβάνεται ο Φ.Π.Α. (18%). Μπορείς να βρεις πόσο θα πληρώσει τελικά γι' αυτόν τον υπολογιστή;

- Τι είναι αυτό που πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα;
- Κάνε την πράξη: ....
- Ποια είναι τα στοιχεία του προβλήματος των οποίων γνωρίζεις τώρα τις τιμές;
- Γράψε στο παρακάτω σχήμα τα δύο γνωστά στοιχεία του προβλήματος (όχι τις τιμές) (στο πράσινο και στο μπλε πλαίσιο) και το ένα άγνωστο και συμπλήρωσε ανάμεσα τους, τα σύμβολα που δείχνουν τη σχέση μεταξύ τους.



- Μπορείς τώρα να απαντήσεις στην Αγγελική πόσο θα πληρώσει για τον υπολογιστή;

  ....

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές το ποσοστό δηλώνει πόσο άλλαξε η αρχική τιμή ενός ποσού προσθετικά (αύξηση) ή αφαιρετικά (μείωση).

Βρίσκω την τελική τιμή ενός ποσού

Όταν η τιμή ενός ποσού αυξάνεται ή μειώνεται, το ποσοστό είναι το μέρος του ποσού που δηλώνει πόση αύξηση ή μείωση υπάρχει στην **αρχική τιμή του ποσού.** Αν δεν γνωρίζουμε το ποσοστό επί της τιμής (αλλά μόνο το ποσοστό %), βρίσκουμε πρώτα αυτό, που τώρα ονομάζεται **αύξηση** ή **μείωση** της αρχικής τιμής.
Η **τελική τιμή του ποσού** προκύπτει, όταν στην αρχική τιμή προσθέσουμε την αύξηση ή αφαιρέσουμε τη μείωση (το ποσοστό).

Παραδείγματα

αρχική τιμή (+-) ποσοστά = τελική τιμή

Πώς προκύπτει η τελική τιμή του υπολογιστή της δραστηριότητας 2:

550 € + 99 € = 649 €

Τα **ποσά** στα ποσοστά είναι πάντα **ανάλογα**. [Π.χ: Το κέρδος στα βιβλία είναι 20%. Αφού στα 100 € το κέρδος είναι 20 €, στα διπλάσια (200 €) είναι διπλάσιο (40 €), στα τριπλάσια (300 €) το τριπλάσιο (60 €) κ.ο.κ.]
Άρα μπορούμε να λύνουμε τα προβλήματα ποσοστών με τις **μεθόδους** που λύνουμε τα προβλήματα των ανάλογων ποσών (αναγωγή στη μονάδα, αναλογία, απλή μέθοδος των τριών). Και στις τρεις μεθόδους η μία από τις τιμές είναι το 100 (ή το 1000 αν πρόκειται για ποσοστό ‰).

Εφαρμογή

Το βιβλιοπωλείο της γειτονιάς κάνει έκπτωση 30% στα βιβλία του. Είναι ευκαιρία να αγοράσεις ένα μεγάλο λεξικό που κόστιζε 25 €. Πόσο θα το αγοράσεις τώρα;

Λύση:
Γνωρίζω την αρχική τιμή και το ποσοστό %.
1. Θα βρω τη μείωση της αρχικής τιμής (την έκπτωση): $\frac{30}{100} \cdot 25 = 0,3 \cdot 25 = 7,5$
2. Θα αφαιρέσω την έκπτωση από την αρχική τιμή: $25 - 7,5 = 17,5$

Απάντηση: Μετά την έκπτωση το λεξικό θα κοστίζει 17,5 €.

Μπορείς να λύσεις το πρόβλημα με μία από τις τρεις μεθόδους, όπως λύνεις τα προβλήματα με ανάλογα ποσά. Πρέπει να προσέξεις όμως στην κατάταξη πώς θα βάλεις τις τιμές και ίσως χρειαστεί να κάνεις κάποια πράξη στο ποσοστό % με το νου, για να βρεις τις τιμές που χρειάζονται.
Για παράδειγμα με αναλογία: Αφού θέλω να βρω κατευθείαν την τελική τιμή για το βιβλίο που κόστιζε αρχικά 25 €, πρέπει να σκεφτώ, ποια θα ήταν η τελική τιμή ενός βιβλίου που κόστιζε αρχικά 100 €. Η έκπτωση του θα ήταν 30 € (έκπτωση 30%). Άρα θα κόστιζε αρχικά 70 €.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Κόστος μετά την έκπτωση	70	x
Κόστος πριν την έκπτωση	100	25

τελική τιμή → / αρχική τιμή → $\frac{70}{100} = \frac{x}{25}$

Μπορείς να το λύσεις συνεχίζοντας με τα σταυρωτά γινόμενα ($100 \cdot x = 70 \cdot 25$) ή από την αρχή με κάποια άλλη από τις μεθόδους λύσης προβλημάτων ανάλογων ποσών.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σχέση: **αρχική τιμή** - **ποσοστό** - **τελική τιμή** και μάθαμε να βρίσκουμε την τελική τιμή. Μπορείς να δώσεις ένα δικό σου παράδειγμα;

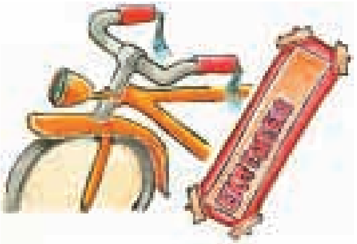
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
➻ *Το ποσοστό μπορεί να εκφράζει την αύξηση ή τη μείωση της αρχικής τιμής.*	❒	❒
➻ *Η τελική τιμή προκύπτει αν πολλαπλασιάσω το ποσοστό % με την αρχική τιμή.*	❒	❒

Κεφάλαιο 43ο **Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την αρχική τιμή**

Από πού έρχομαι;

Μελετώ τη σχέση μεταξύ αρχικής τιμής, ποσοστού και τελικής τιμής.
Βρίσκω την αρχική τιμή σε προβλήματα ποσοστών.

Δραστηριότητα 1η

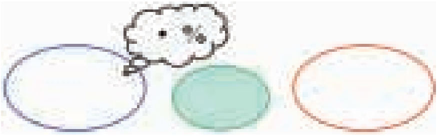


Ένα μαγαζί με ποδήλατα διαφημίζει ότι έχει βάλει έκπτωση 35% σε όλα τα είδη του. Βλέπεις στη βιτρίνα ένα ποδήλατο που κοστίζει μετά την έκπτωση 78 €. Πόσο κόστιζε αρχικά;

- Σε τι διαφέρει το πρόβλημα αυτό από τα προβλήματα ποσοστών του προηγούμενου μαθήματος;

  ....

- Θυμήσου το σχήμα του προηγούμενου μαθήματος σχετικά με τις διάφορες τιμές στα προβλήματα ποσοστών και συμπλήρωσε τις τιμές του προβλήματος. Στη θέση των άγνωστων τιμών μπορείς να βάλεις μεταβλητές.



- Στο συγκεκριμένο ποδήλατο γνωρίζεις την .... τιμή και ψάχνεις ....
- Στο κλάσμα $\frac{35}{100}$ (ποσοστό %) το 100 δηλώνει την .... τιμή ενός ποδηλάτου.
- Να βρεις την τελική τιμή για το ποδήλατο των 100 € ....
- Τώρα μπορείς να συμπληρώσεις τον πίνακα και την αναλογία:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Κοστίζει μετά την έκπτωση		
Κόστιζε πριν την έκπτωση	100	

$$\frac{\text{τελική τιμή}}{\text{αρχική τιμή}} \quad \frac{___}{100} = \frac{___}{___}$$

- Μπορείς να το λύσεις με όποια άλλη από τις μεθόδους των ανάλογων ποσών θέλεις.

Δραστηριότητα 2η

Το πρωί η Βασιλική διάβασε πάνω στο κουτί με το γάλα: «Πίνοντας 500 ml γάλα (2 μεγάλα ποτήρια) ο οργανισμός μας παίρνει το 75% της Συνιστώμενης Ημερήσιας Ποσότητας ασβεστίου». Είδε στο διατροφικό πίνακα ότι 100 ml γάλα περιέχουν 120 mg ασβέστιο και σκέφτηκε να υπολογίσει πόσα mg ασβεστίου χρειάζεται ο οργανισμός καθημερινά.

- Τι πρέπει να βρούμε πρώτα; ....
- Κάνε την πράξη: ....
- Αυτό που βρήκες είναι το σύνολο των αναγκών ή το μέρος; ....
- Είναι αρκετό αυτό που βρήκες, μαζί με το 75% για να εφαρμόσεις κάποια από τις μεθόδους λύσης των προβλημάτων με ποσοστά; ....
- Επέλεξε μια μέθοδο και εξήγησε πώς θα έλυνες το πρόβλημα.

  ....

  ....

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, στα προβλήματα ποσοστών, επειδή ο αριθμός 100 είναι πάντα γνωστός, αρκεί να ξέρουμε δύο τιμές για να βρούμε την άγνωστη.

Βρίσκω την αρχική τιμή ενός ποσού

Όταν το ζητούμενο σ' ένα πρόβλημα με ποσοστά είναι η αρχική τιμή, για να την υπολογίσουμε αρκεί να γνωρίζουμε το ποσοστό % και μια τιμή ακόμα.

Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την τιμή που δεν χρειάζεται (π.χ. στο διπλανό παράδειγμα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το κέρδος, δηλαδή την αύξηση).

Παραδείγματα

Πόσο αγοράζει την εφημερίδα το περίπτερο όταν την πουλάει 2 € και το ποσοστό κέρδους είναι 25%;

Λύση: Γνωρίζω το ποσοστό κέρδους στα % και την τελική τιμή πώλησης.

1. Θα υπολογίσω την τελική τιμή όταν η αρχική τιμή είναι 100 €: Αν αγοράζει την εφημερίδα 100 € (αρχική τιμή) και κερδίζει 25 € (κέρδος), άρα την πουλάει 125 € (τελική τιμή).
2. Συμπληρώνω την αναλογία: $= \frac{\text{τελική τιμή} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} \quad \frac{125}{100} = \frac{2}{x}$

$125 \cdot x = 100 \cdot 2 \quad 125 \cdot x = 200 \quad x = 200 : 125 \quad x = 1{,}6$

Απάντηση: Αγοράζει την εφημερίδα 1,6 €.

Σε προβλήματα στα οποία το ποσοστό δηλώνει μέρος του συνόλου και όχι κάποια αύξηση ή μείωση της αρχικής τιμής δεν υπάρχει τελική τιμή.

Στη 2η δραστηριότητα της προηγούμενης σελίδας, πρώτα βρίσκουμε το ποσοστό στην αρχική τιμή, που είναι το μέρος:
5 • 120 = 600 mg ασβέστιο
και μετά την αρχική τιμή, που είναι το σύνολο:

$\frac{\text{ποσοστό} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} \quad \frac{75}{100} = \frac{600}{x} \qquad 75 \cdot x = 600 \cdot 100$

75x = 60000, άρα x = 60000 : 75, άρα x = 800 mg ασβέστιο

Εφαρμογή

Ρωτήσαμε κάποιους μαθητές ηλικίας 12 – 14 ετών «πόσο συχνά σερφάρετε στο ιντερνετ;» Οι 210 μαθητές (ποσοστό 70%) απάντησαν «μια φορά την εβδομάδα». Οι υπόλοιποι απάντησαν «μια φορά το μήνα». Πόσοι ήταν οι υπόλοιποι μαθητές;

Λύση

Γνωρίζω το ποσοστό στα % και το ποσοστό στην αρχική τιμή. Δεν ξέρω την αρχική τιμή (πόσοι ήταν όλοι οι μαθητές).
Άρα μπορώ κατευθείαν να συμπληρώσω την αναλογία:

$\frac{\text{ποσοστό} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} \quad \frac{70}{100} = \frac{210}{x} \qquad 70 \cdot x = 210 \cdot 100 \qquad 70 \cdot x = \dots\dots\dots\dots$

x = ... x = ... Άρα όλοι οι μαθητές ήταν 300.

Οι υπόλοιποι μαθητές ήταν 300 – 210 = 90

Απάντηση: Οι υπόλοιποι μαθητές ήταν 90.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σχέση: **αρχική τιμή** - **ποσοστό** - **τελική τιμή** και μάθαμε να βρίσκουμε την αρχική τιμή. Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Για να υπολογίσω την αρχική τιμή αρκεί να ξέρω άλλες δύο τιμές.	❒	❒
Στα προβλήματα ποσοστών πάντα υπάρχει τελική τιμή.	❒	❒
Σε μια έρευνα το δείγμα είναι μέρος του συνολικού πληθυσμού.	❒	❒

Κεφάλαιο 44ο

Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό

Για να μη λέμε πολλά ...

Κατανοώ την ανάγκη χρήσης του ποσοστού (%).
Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό (%) σε προβλήματα ποσοστών.

Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό πίνακα φαίνεται ο πληθυσμός της Ελλάδας κατά τις απογραφές του 1971 και 2001.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΕΛΛΑΔΑΣ ΚΑΤΑ ΦΥΛΟ ΚΑΙ ΟΜΑΔΕΣ ΗΛΙΚΙΩΝ		
	1971	**2001**
Σύνολο Ελλάδας	**8.768.372**	**10.964.020**
0 – 14 ετών	2.223.904	1.666.888
15- 64 ετών	5.587.352	7.423.899
64 ετών και άνω	957.116	1.873.243

- Τι παρατηρείς σχετικά με τον πληθυσμό των παιδιών (0 – 14 ετών); ....
- Βρες πόσο μειώθηκε αυτή η πληθυσμιακή ομάδα (μπορείς να χρησιμοποιήσεις υπολογιστή τσέπης)

  ....
- Γιατί δεν είναι εύκολο να εκφράσεις (και να θυμάσαι) τη μείωση και να κάνεις συγκρίσεις χρησιμοποιώντας τις τιμές του πίνακα;
- Για να εκφράσεις τη μείωση ως ποσοστό στους 100 κατοίκους (%), κάτι που είναι πιο εύκολο να διαχειριστείς, τι είναι αυτό που πρέπει να βρεις;

  ....
- Συμπλήρωσε τον πίνακα ποσών και τιμών. Μπορείς να συνεχίσεις με όποια μέθοδο θέλεις για να βρεις την τιμή του άγνωστου.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μείωση κατοίκων		x
Αρχικός αριθμός κατοίκων		100

- Αυτό που θα βρεις είναι ότι από το 1971 ως το 2001, ο πληθυσμός της Ελλάδας στην ηλικιακή ομάδα 0 – 14 ετών παρουσίασε μείωση ....%.

Δραστηριότητα 2η

Ένα μαγαζί διαφημίζει εκπτώσεις από 10% ως 40%. Βλέπεις ένα τζην μπουφάν του οποίου η αρχική τιμή ήταν 38 € και η τελική 28,5 €. Πόσο στα εκατό (%) ήταν η έκπτωση;

- Συμπλήρωσε το λόγο $\frac{\quad}{100}$, βάζοντας στη θέση του άγνωστου μια μεταβλητή.
- Γράψε τώρα με λόγια τους όρους σ' αυτό το κλάσμα: ______________________
- Αφού θέλεις να βρεις κατευθείαν την έκπτωση στα 100 €, τι πρέπει να βρεις πρώτα για να φτιάξεις τον πίνακα ποσών και τιμών με τα δεδομένα που σου χρειάζονται; ....
- Κάνε αυτή την πράξη με το νου και συμπλήρωσε τον πίνακα:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Έκπτωση		
		100

- Τώρα μπορείς να συμπληρώσεις την αναλογία: $\frac{\text{έκπτωση} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} \quad \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{100}$
- Μπορείς να το λύσεις με όποια άλλη από τις μεθόδους των ανάλογων ποσών θέλεις.

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να εκφράσουμε ένα μέρος ενός ποσού ως ποσοστό στα εκατό (%).

Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό (%)

Η τιμή στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό είναι η αρχική τιμή.
Όταν το ζητούμενο σε ένα πρόβλημα είναι το ποσοστό %, δηλαδή το ποσοστό σε αρχική τιμή 100, για να το βρούμε πρέπει να γνωρίζουμε την αρχική τιμή και την αύξηση ή τη μείωση στην αρχική τιμή.

Παραδείγματα

Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει ένα βιβλίο 8 € και το πουλά 14 €. Πόσο στα εκατό (%) είναι το κέρδος του;

Λύση: Γνωρίζω την τιμή αγοράς (αρχική τιμή) και την τιμή πώλησης (τελική τιμή).

α. Υπολογίζω το ποσοστό κέρδους στην αρχική τιμή:
14 – 8 = 6 € κέρδος

β. Συμπληρώνω την αναλογία: $\frac{\text{κέρδος} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} = \frac{6}{8} = \frac{x}{100}$

$8 \cdot x = 6 \cdot 100$ άρα $8 \cdot x = 600$ $x = 600 : 8$ $x = 75$

Απάντηση: Το κέρδος του είναι 75%.

Αν γνωρίζουμε την τελική τιμή και δεν γνωρίζουμε την αρχική τιμή ή το ποσοστό αύξησης ή μείωσης στην αρχική, μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα αυτό που δεν γνωρίζουμε και μετά να συνεχίσουμε για να βρούμε το ποσοστό στα εκατό (%).

Στη 2η δραστηριότητα της προηγούμενης σελίδας, πρώτα βρίσκουμε την έκπτωση στην αρχική τιμή:

38 – 28,50 = 9,50 € έκπτωση

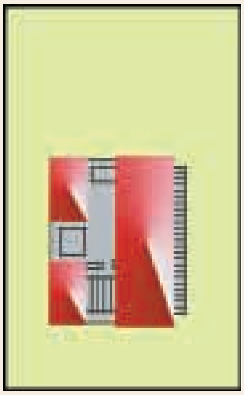
και μετά την έκπτωση στα 100, δηλαδή το ποσοστό %

$\frac{\text{έκπτωση} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} \quad \frac{9{,}50}{38} = \frac{x}{100}$ $38 \cdot x = 9{,}50 \cdot 100$

$38 \cdot x = 950$ άρα $x = 950 : 38$ $x =$ 25% έκπτωση

Εφαρμογή

Το οικόπεδο του σχολείου έχει μήκος 60 μέτρα και πλάτος 45 μέτρα. Το κτίριο καταλαμβάνει 675 τετραγωνικά μέτρα και το υπόλοιπο είναι αυλή. Τι ποσοστό στα 100 (%) της επιφάνειας του οικοπέδου είναι χτισμένο και τι ποσοστό είναι ακάλυπτο;



Λύση:

α. Βρίσκω τη συνολική έκταση του οικοπέδου (αρχική τιμή), που είναι η τιμή στην οποία θα υπολογίσω το ποσοστό: 60 • 45 = 2700 τετραγωνικά μέτρα

β. Το ποσοστό κάλυψης του οικοπέδου είναι 675 στα 2.700.

γ. Συμπληρώνω την αναλογία: $\frac{\text{ποσοστό} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} \quad \frac{675}{2700} = \frac{x}{100}$

$2700 \cdot x = 675 \cdot 100$ $2700 \cdot x =$ .... x = ... x = ...

Απάντηση: Το ποσοστό στα 100 (%) της επιφάνειας του οικοπέδου που είναι χτισμένο είναι 25% και το ακάλυπτο μέρος είναι το υπόλοιπο, δηλαδή 75%.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σχέση **αρχική τιμή** - **ποσοστό** - **τελική τιμή** και μάθαμε να βρίσκουμε το ποσοστό %. Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Στο ποσοστό % το 100 είναι αρχική τιμή.	❒	❒
Για να βρω το ποσοστό % πρέπει να ξέρω το ποσοστό στην αρχική τιμή.	❒	❒

Ανακεφαλαίωση

Λόγοι - Αναλογίες

Όταν μιλάμε συμβολικά

- **Ανάλογα ποσά**

πίνακας

α	3	4	6	8
β	6	8	12	16

σχέση

$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = 0{,}5 \qquad \frac{α}{β} = 0{,}5$

- **Αντιστρόφως ανάλογα ποσά**

α	4	5	8	10
β	10	8	5	4

$4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40 \qquad α \cdot β = 40$

- **Ποσοστό** — μέρος κάποιου ποσού που δηλώνει τη σχέση *μέρος προς ποσό*
- **Ποσοστό %** — ένα μέρος του 100 που εκφράζεται ως λόγος, ως δεκαδικός ή με το σύμβολο %
- **Αρχική τιμή** — η τιμή του αρχικού ποσού πάνω στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό
- **Τελική τιμή** — η τιμή που προκύπτει όταν το ποσοστό αφαιρεθεί ή προστεθεί στην αρχική τιμή

- η σχέση που τα συνδέει — φαίνεται συμβολικά στο σχήμα:

Περιπτώσεις προβλημάτων ποσοστών

Βρίσκουμε το ποσοστό

- όταν γνωρίζουμε το μέρος και την αρχική τιμή
  - κάνουμε διαίρεση π.χ.: **ποσοστό 3 στα 12** $\frac{3}{12}$ δηλαδή 3 :12 = **0,25**
- όταν γνωρίζουμε το ποσοστό στα εκατό (%) και την αρχική τιμή
  - κάνουμε πολλαπλασιασμό π.χ.: **το 25% του** 12 $\frac{25}{100} \cdot 12 = \frac{300}{100} = 3$

Βρίσκουμε την τελική τιμή

- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και το ποσοστό αύξησης ή μείωσης
  - κάνουμε πρόσθεση ή αφαίρεση π.χ.: **αύξηση 3 στα 12** τελική τιμή 12 + 3 = 15
- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και το ποσοστό στα εκατό (%), υπάρχουν δύο τρόποι εργασίας
  - **α.** βρίσκουμε πρώτα το ποσοστό αύξησης ή μείωσης (με πολλαπλασιασμό)
  - **β.** βρίσκουμε την τελική τιμή στα 100 με το νου και σχηματίζουμε αναλογία

Βρίσκουμε την αρχική τιμή

- όταν γνωρίζουμε το ποσοστό % και το ποσοστό στην αρχική τιμή
  - σχηματίζουμε αναλογία
- όταν γνωρίζουμε το ποσοστό στα εκατό (%) και την τελική τιμή
  - βρίσκουμε πρώτα την τελική τιμή στα 100 με το νου

Βρίσκουμε το ποσοστό %

- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και το ποσοστό στην αρχική τιμή
  - σχηματίζουμε αναλογία
- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και την τελική τιμή
  - βρίσκουμε πρώτα το ποσοστό αύξησης ή μείωσης (με αφαίρεση)

Χρυσοί κανόνες

Η τιμή του ποσού στην όποια υπολογίζεται το ποσοστό, για το πρόβλημα ποσοστών, λέγεται αρχική τιμή (ακόμα κι αν είναι η τιμή πώλησης ενός προϊόντος).
Τα ποσά στα ποσοστά είναι πάντα ανάλογα. Τα προβλήματα ποσοστών λύνονται με τις μεθόδους λύσης των ανάλογων ποσών (αναγωγή στη μονάδα, αναλογία, απλή μέθοδο των τριών). Επειδή υπάρχει πάντα η τιμή 100, γνωρίζοντας δύο τιμές, μπορούμε να βρούμε τις άλλες δύο, αρκεί να προσέξουμε στην κατάταξη. Μπορεί να χρειάζεται νοερή πράξη στα 100.

1ο Πρόβλημα "Οι εκλογές"

Στους εκλογικούς καταλόγους είναι γραμμένα 16.000 άτομα. Από αυτά ψήφισαν στις δημοτικές εκλογές 85%. Η παράταξη Α΄ πήρε 51%, ενώ η παράταξη Β΄ πήρε 34% των ψήφων. Οι υπόλοιποι ψήφισαν λευκό ή άκυρο. Πόσα άτομα ψήφισαν και πόσες ψήφους πήρε κάθε παράταξη;

Λύση

Απάντηση: ....

2ο Πρόβλημα "Οι εκπτώσεις"

Η Γεωργία έχει αναλάβει την έρευνα αγοράς για να αγοράσει 25 κρεμαστά με ασημένιες μικρές πλακέτες για αναμνηστικά για την Στ΄ τάξη.
Βρήκε την ίδια πλακέτα σε δύο καταστήματα. Η αρχική τιμή της ήταν και στα δύο 10 €. Το πρώτο κατάστημα είχε βάλει έκπτωση αρχικά 25% και τώρα 10% στην τιμή της έκπτωσης, ενώ το δεύτερο κατάστημα είχε αρχικά έκπτωση 10% και τώρα ακόμη 25%. Υπάρχει διαφορά στην τιμή;

Λύση

Απάντηση: ....

3ο Πρόβλημα "Κέρδος πάνω στο κέρδος"

Μια αυτοκινητοβιομηχανία πουλάει τα αυτοκίνητα στις αντιπροσωπείες με 20% κέρδος στην τιμή κόστους. Ο αντιπρόσωπός της στην Ελλάδα τα πουλάει με κέρδος 10% στην τιμή αγοράς τους. Ο κ. Παπαγεωργίου αγόρασε το αυτοκίνητό του από τον αντιπρόσωπο και πλήρωσε 9.900 €. Ποιο ήταν το κόστος κατασκευής του αυτοκινήτου;

Λύση

Απάντηση: ....

4η θεματική ενότητα
Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
45. Αξίζει όσο χίλιες λέξεις ...	Απεικονίζω δεδομένα με ραβδόγραμμα ή εικονόγραμμα	109
46. Η ώρα των αποφάσεων	Ταξινομώ δεδομένα – εξάγω συμπεράσματα	111
47. Το πήρες το μήνυμα;	Άλλοι τύποι γραφημάτων	113
48. Ο Προκρούστης των αριθμών	Βρίσκω το μέσο όρο	115

Συλλογή και Επεξεργασία Δεδομένων

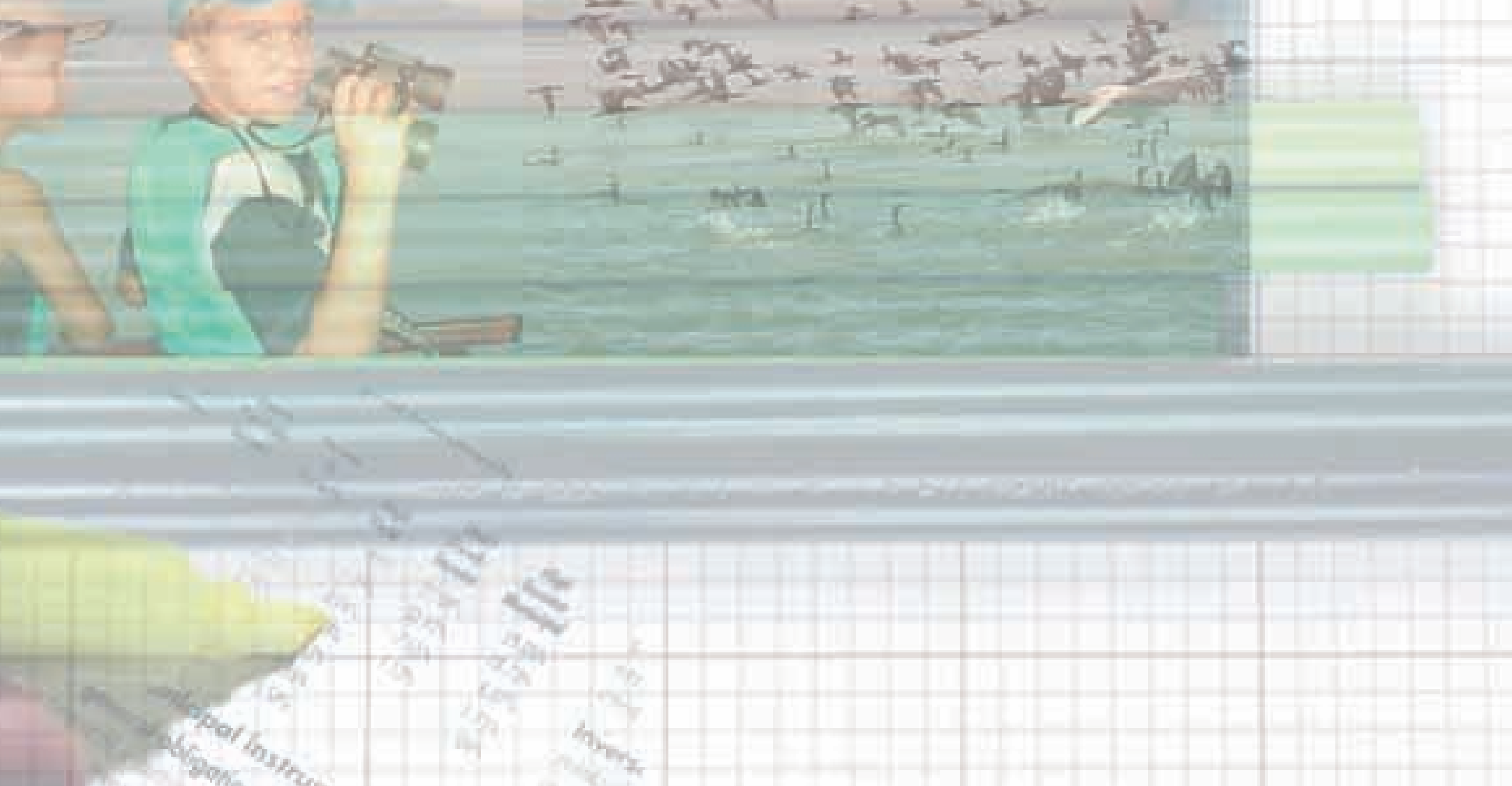
Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τη συλλογή και την επεξεργασία δεδομένων.

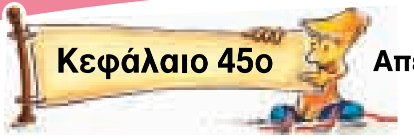
Όλες οι πληροφορίες που μπορούμε να συγκεντρώσουμε από παρατηρήσεις, μετρήσεις, εξετάσεις ερωτηματολόγια κ.λπ. λέγονται δεδομένα.

Για να μπορέσεις να ερμηνεύσεις τα δεδομένα αυτά πρέπει να τα οργανώσεις και να τα παρουσιάσεις με τη μορφή εικόνας.

Τι είδους εικόνα θα διαλέξεις όμως; Η Στατιστική θα σε βοηθήσει να κατασκευάζεις τέτοιες εικόνες αλλά και να τις ερμηνεύεις.

Καλή διασκέδαση λοιπόν παρέα με τις εικόνες και τη Στατιστική...





Κεφάλαιο 45ο Απεικονίζω δεδομένα με ραβδόγραμμα ή εικονόγραμμα

Αξίζει όσο χίλιες λέξεις ...

Ανακαλύπτω τη χρησιμότητα των γραφικών παραστάσεων.
Αντλώ πληροφορίες από το ραβδόγραμμα και το εικονόγραμμα.
Μαθαίνω να κατασκευάζω ένα ραβδόγραμμα.

Δραστηριότητα 1η

Όταν επισκέφθηκαν το Κέντρο Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης Κλειτορίας, τα παιδιά άκουσαν τον υπεύθυνο να τους μιλά για τα απειλούμενα φυτά της Ελλάδας. Τους έδειξε το διπλανό πίνακα και τους εξήγησε ότι δείχνει τα απειλούμενα φυτά όπως είναι καταγεγραμμένα στις διάφορες περιοχές στις οποίες φυτρώνουν (ακόμη).

Με έκπληξη άκουσαν ότι τα 932 από τα 5.605 είδη φυτών που υπάρχουν στην Ελλάδα κινδυνεύουν να εξαφανιστούν, ενώ 1 φυτό έχει ήδη εξαφανιστεί.

- Τι διαφορά έχει αυτός ο «πίνακας» από τους πίνακες που συνάντησες μέχρι τώρα;
- Ποιες πληροφορίες παίρνεις από αυτόν και ποιες όχι;

Δραστηριότητα 2η

Το γράφημα είναι ένας τρόπος για να μελετήσεις ή να παρουσιάσεις δεδομένα. Παρακάτω παρουσιάζονται στοιχεία για κάποια πουλιά με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Άνοιγμα φτερών αρπακτικών πτηνών

Πτηνά	Άνοιγμα φτερών σε εκ.
Γυπαετός	270
Γύπας	260
Μαυροπετρίτης	94
Πετρίτης	103
Σπιζαετός	155
Χρυσαετός	203

- Ποιο πουλί έχει το μεγαλύτερο άνοιγμα φτερών; Χρησιμοποίησες τον πίνακα ή το γράφημα για να το βρεις;
- Πόσο ακριβώς είναι το άνοιγμα των φτερών του γυπαετού; Αυτήν την πληροφορία ποια από τις δύο παρουσιάσεις σου την προσφέρει ευκολότερα;

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι, για να καταγράψουμε δεδομένα ή πληροφορίες με σύντομο και παραστατικό τρόπο, χρησιμοποιούμε τα γραφήματα.

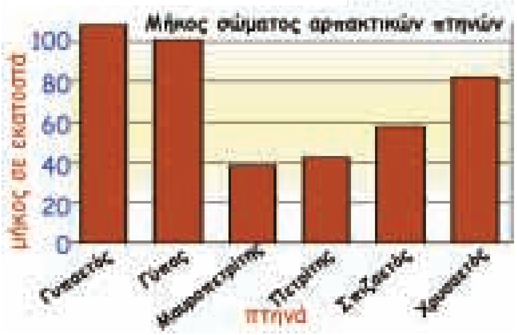
Ραβδόγραμμα και εικονόγραμμα

Σε ένα γράφημα ράβδων ή **ραβδόγραμμα** συγκρίνουμε τα δεδομένα, συγκρίνοντας τα μήκη (ή τα ύψη) των ράβδων.

Τα χαρακτηριστικά ενός ραβδογράμματος:

1. Το ραβδόγραμμα πρέπει πάντα να έχει τίτλο.
2. Η αριθμητική κλίμακα μπορεί να είναι στην οριζόντια ή στην κάθετη πλευρά, οπότε οι ράβδοι είναι αντίστοιχα οριζόντιες ή κάθετες.
3. Οι αποστάσεις ανάμεσα στους αριθμούς πρέπει να είναι ίσες.

Παραδείγματα



Το **εικονόγραμμα** είναι ένα είδος ραβδογράμματος στο οποίο χρησιμοποιείται ένα σύμβολο για να αναπαραστήσει έναν συγκεκριμένο αριθμό αντικειμένων (π.χ. 🚕 = 1.000 αυτοκίνητα).

Εφαρμογή ***Φτιάξε ένα δικό σου ραβδόγραμμα***

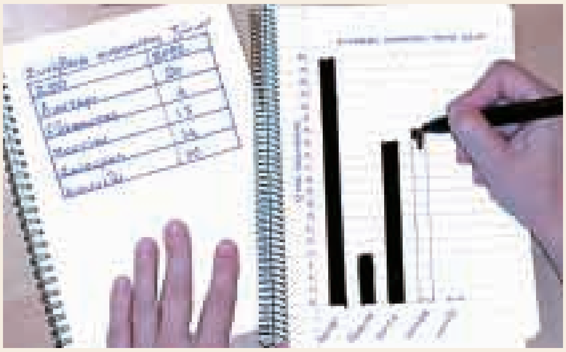
Εφαρμογή : *Φτιάξε ένα δικό σου ραβδόγραμμα*

Παρακολουθώντας ένα ντοκιμαντέρ για τα ζώα τα παιδιά της Στ΄ τάξης κατέγραψαν στοιχεία σχετικά με τις συνήθειες ύπνου διάφορων ζώων. Στη διάρκεια του εικοσιτετραώρου ο σκίουρος ξεκουράζεται 14 ώρες, ενώ το κουνέλι αρκείται σε 10. Τα ποντίκια χρειάζονται 13 ώρες ανάπαυση, σε αντίθεση με τον ελέφαντα που αρκείται σε μόλις 4 ώρες. Τέλος, το ζώο με τη μεγαλύτερη ανάγκη για ξεκούραση φαίνεται πως είναι το λιοντάρι, μια και περνά τις 20 ώρες του εικοσιτετραώρου ξαπλωμένο.

Να απεικονίσεις τα στοιχεία αυτά με ραβδόγραμμα.

Λύση - Απάντηση:

1. Φτιάξε ένα πίνακα με τα στοιχεία του προβλήματος.
2. Γράψε ένα τίτλο για το γράφημά σου.
3. Γράψε τα ονόματα από τα ζώα στη μια πλευρά και αποφάσισε την απόσταση που θα χρησιμοποιήσεις για την αριθμητική κλίμακα στην άλλη πλευρά (π.χ. μια γραμμή του τετραδίου ισούται με 1 ώρα)
4. Σχημάτισε και χρωμάτισε τις ράβδους.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το **ραβδόγραμμα** και το **εικονόγραμμα**. Σκέψου και πες ένα δικό σου παράδειγμα στο οποίο να μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Στα ραβδογράμματα η τιμή κάθε ράβδου φαίνεται από το μήκος (ή το ύψος) της.	❒	❒
Πρώτα κατασκευάζουμε την κλίμακα στο ραβδόγραμμα και μετά συγκεντρώνουμε τα στοιχεία.	❒	❒

Κεφάλαιο 46ο

Ταξινομώ δεδομένα – εξάγω συμπεράσματα

Η ώρα των αποφάσεων

Συλλέγω, καταγράφω και ταξινομώ δεδομένα.
Παρουσιάζω την κατανομή συχνότητας των δεδομένων.
Χρησιμοποιώ τα αποτελέσματα της επεξεργασίας των δεδομένων.

Δραστηριότητα

Οι υπεύθυνοι ενός πάρκου αναψυχής για να αποφασίσουν τι είδους δραστηριότητες πρέπει να προσφέρονται στο πάρκο, ενδιαφέρονται να μάθουν τις ηλικίες των νέων που επισκέπτονται το χώρο. Κατέγραψαν λοιπόν τις ηλικίες των παιδιών (όχι των συνοδών τους) και των εφήβων που το επισκέφθηκαν κατά τις τέσσερις πρώτες μέρες της λειτουργίας του. Οι διπλανές καρτέλες είναι δύο από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για την καταγραφή.

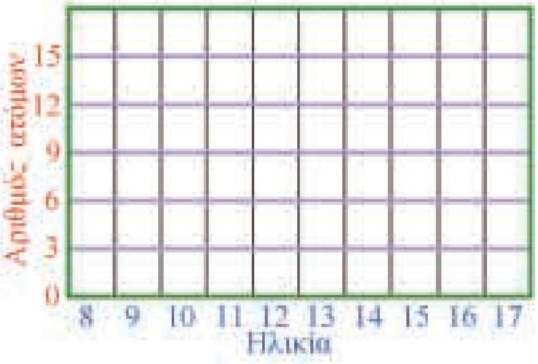
8	10	12	8	14	16	15	14
13	9	11	12	10	14	11	13
12	14	13	14	12	11	13	13
14	13	11	12	15	14	11	13

10	9	12	17	13	14	15	17
13	12	11	15	13	12	16	14
15	12	14	13	11	12	15	14
13	14	12	15	14	11	13	13

- Πώς νομίζεις ότι συγκέντρωσαν τα στοιχεία οι υπεύθυνοι;
- Με ποιους άλλους τρόπους μπορεί κανείς να συγκεντρώσει στοιχεία για ένα θέμα;
- Για ποιο λόγο νομίζεις ότι συγκεντρώνονται τα στοιχεία αυτά;
- Είναι εύκολο να βγάλουμε συμπεράσματα από αυτά τα δεδομένα, όπως είναι;
- Για να πάρουμε τις πληροφορίες που θέλουμε, αρκεί να συλλέξουμε τα δεδομένα;

Στις προηγούμενες καρτέλες, κάθε αριθμός αντιπροσωπεύει έναν άνθρωπο. Όλοι πρέπει να καταμετρηθούν. Η πρώτη εργασία ταξινόμησης είναι να γράψεις (στα διπλανά κελιά) όλους τους αριθμούς σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

- Τώρα μπορείς να μετρήσεις πόσοι ήταν οι επισκέπτες από κάθε ηλικία. Ένας τρόπος για να θυμάσαι τη μέτρηση είναι ο παρακάτω: για κάθε ένα άτομο που θα καταμετράς θα σημειώνεις μια γραμμή **I**. Θα ομαδοποιείς τις γραμμές ανά 5, με μια γραμμή στη μέση: **~~IIII~~**.
- Μετά κάνε το παρακάτω ραβδόγραμμα:



Ηλικία	Καταμέτρηση με σύμβολα I	Συχνότητα
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
Σύνολο		

- Ποιες είναι οι διαπιστώσεις από τα δεδομένα;
- Ποια μπορεί να είναι η απόφαση για τις δραστηριότητες που πρέπει να προσφέρονται στο πάρκο;

....

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι τα αριθμητικά δεδομένα με κατάλληλη επεξεργασία μας βοηθούν να βγάζουμε συμπεράσματα, να κάνουμε προβλέψεις και να παίρνουμε αποφάσεις.

Κατανομή συχνοτήτων

Ο **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** μας δείχνει πόσο συχνά υπάρχει κάθε δεδομένο στην καταγραφή μας.

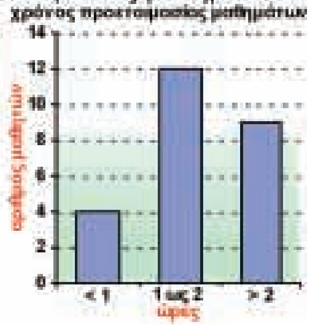
Τρόπος εργασίας

1. Συλλέγουμε τα δεδομένα.
2. Τακτοποιούμε τα δεδομένα σε μια σειρά (αύξουσα ή φθίνουσα).
3. Καταμετρούμε τη συχνότητα εμφάνισης κάθε δεδομένου.
4. Παρουσιάζουμε τα δεδομένα με γράφημα.

Παραδείγματα

Χρόνος καθημερινής προετοιμασίας μαθημάτων

Ώρες	Καταμέτρηση	Συχνότητα
< 1	IIII	4
1 ως 2	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
> 2	~~IIII~~ IIII	9



Εφαρμογή

Τα παιδιά ρώτησαν το δάσκαλο τι χρειάζονται τα κριτήρια αξιολόγησης στα μαθηματικά. Εκείνος τους εξήγησε πως έπειτα από κάθε κριτήριο αξιολόγησης καταγράφει τις επιδόσεις τους και επεξεργάζεται τα δεδομένα, ώστε να αποφασίσει αν τα περισσότερα παιδιά κατάλαβαν το κεφάλαιο ή αν χρειάζεται να επαναλάβει κάτι.

«Για παράδειγμα, ας ελέγξουμε αν καταλάβατε το κεφάλαιο *Εξισώσεις* ή αν χρειάζεται κάποια επανάληψη του κεφαλαίου. Οι βαθμοί σας ήταν: 9, 8, 8, 9, 10, 7, 8, 9, 7, 10, 10, 7, 6, 9, 10, 8, 9, 9, 8, 10. Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε;»

Λύση:

1. – 2. Αφού συλλέξαμε τα δεδομένα θα τα βάλουμε κατά αύξουσα σειρά:

6	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10

3. Θα φτιάξουμε έναν πίνακα συχνοτήτων με όλους τους βαθμούς.

ΒΑΘΜΟΣ	ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
6	I	1
7	III	3
8	IIII	4
9	~~IIII~~ I	6
10	~~IIII~~	5

4. Με τα δεδομένα του πίνακα θα φτιάξουμε ένα γράφημα.

Απάντηση: Διαπίστωση: Τα περισσότερα παιδιά κατάλαβαν το κεφάλαιο. Απόφαση: Δεν θα γίνει επανάληψη σε όλη την τάξη, απλώς μόνο ορισμένα παιδιά θα χρειαστεί να βοηθηθούν από το δάσκαλο.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **κατανομή συχνότητας**. Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα τι μας χρειάζεται;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
➻ *Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων πρέπει να περιλαμβάνει όλα τα δεδομένα.*	❒	❒
➻ *Με βάση τα δεδομένα κάνουμε προβλέψεις για το μέλλον.*	❒	❒

Κεφάλαιο 47ο Άλλοι τύποι γραφημάτων

Το πήρες το μήνυμα;

Αντλώ πληροφορίες από ένα γράφημα γραμμής.
Μελετώ ένα κυκλικό διάγραμμα.
Επιλέγω τον κατάλληλο τύπο γραφήματος.

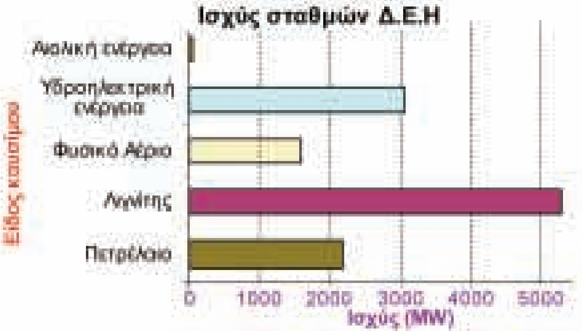
Δραστηριότητα 1η

Το παρακάτω γράφημα παρουσιάζει την αύξηση του πληθυσμού στην Αττική από τότε που η Αθήνα έγινε πρωτεύουσα του ελληνικού κράτους μέχρι το 2003.

- Τι διαπιστώνουμε για τον πληθυσμό της πρωτεύουσας με μια ματιά από το γράφημα;
- Γιατί προτιμήσαμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα με αυτόν τον τύπο γραφήματος κι όχι με ραβδόγραμμα;
- Θυμήσου το γράφημα που έφτιαξες με δύο ανάλογα ποσά και σύγκρινέ το μ΄ αυτό.

Δραστηριότητα 2η

Η ποσότητα ενέργειας που παράγεται από τη Δ.Ε.Η. (31-12-03) από τους διάφορους σταθμούς παραγωγής φαίνεται παρακάτω στο ραβδόγραμμα και στο κυκλικό διάγραμμα.



- Ποιο είδος παραγωγής είναι το κυρίαρχο; Χρησιμοποίησες το ραβδόγραμμα ή το κυκλικό διάγραμμα για να το βρεις;
- Περίπου τι ποσοστό της συνολικής παραγωγής είναι η υδροηλεκτρική; Από ποιο γράφημα παίρνεις καλύτερα αυτή την πληροφορία;
- Θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις κυκλικό διάγραμμα για την δραστηριότητα 1;

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, για να παρουσιάσουμε και να τονίσουμε με διαφορετικό τρόπο τα δεδομένα χρησιμοποιούμε διαφορετικούς τύπους γραφημάτων.

Γράφημα γραμμής και κυκλικό διάγραμμα

Το **γράφημα γραμμής** χρησιμοποιείται για την παρουσίαση δεδομένων που αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου.

Το **κυκλικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για την παρουσίαση της σχέσης του μέρους προς το σύνολο.

Παραδείγματα

Όταν επιλέγουμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα μας, πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι το γράφημα δίνει πληροφορίες με «γρήγορο» τρόπο, οπότε πρέπει να **επιλέγουμε τον κατάλληλο τύπο γραφήματος** για να τονίσουμε την πληροφορία που θέλουμε.

Εφαρμογή ***Επιλογή του κατάλληλου γραφήματος***

Τα παιδιά έκαναν μια έρευνα ανάμεσα στους συμμαθητές τους καταγράφοντας το πώς ξοδεύουν το χαρτζιλίκι τους κατά τη διάρκεια της εβδομάδας. Συγκέντρωσαν τα στοιχεία και αφού τα επεξεργάστηκαν κατέληξαν στον παρακάτω πίνακα.

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
Ποσοστό % που ξόδεψαν	10 %	8%	8%	10%	10%	34%	20%

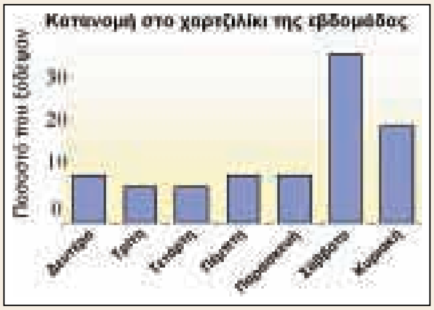
Ποιος είναι ο καλύτερος τύπος γραφήματος για να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους;

Λύση - Απάντηση:

Τα δεδομένα είναι τέτοιου είδους που μπορούν να παρουσιαστούν με πολλούς τύπους γραφημάτων. Εξαρτάται από το τι θέλουν να τονίσουν τα παιδιά με το γράφημά τους.

1. Αν θέλουν να δείξουν **πώς αλλάζει** (αυξάνεται ή μειώνεται) το ποσό που ξοδεύουν στη διάρκεια της εβδομάδας, θα χρησιμοποιήσουν το γράφημα γραμμής.

2. Αν θέλουν να παρουσιάσουν το **ποσοστό** κάθε μέρας μεμονωμένα, θα χρησιμοποιήσουν το ραβδόγραμμα.



3. Αν θέλουν να τονίσουν τη **σχέση** της καθημερινής κατανάλωσης **προς το σύνολο** της εβδομάδας, θα χρησιμοποιήσουν το κυκλικό διάγραμμα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το **γράφημα γραμμής** και το **κυκλικό διάγραμμα**. Να δώσεις ένα δικό σου παράδειγμα στο οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Για την καταγραφή του πυρετού είναι καλύτερο το ραβδόγραμμα.	❒	❒
Στο ραβδόγραμμα και στο γράφημα γραμμής το σύνολο δεν φαίνεται αμέσως.	❒	❒

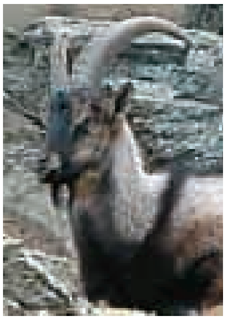
Κεφάλαιο 48ο

Βρίσκω το μέσο όρο

Ο Προκρούστης των αριθμών

Κατανοώ την έννοια του μέσου όρου.
Κατανοώ την ανάγκη χρήσης του μέσου όρου.
Υπολογίζω και χρησιμοποιώ το μέσο όρο.

Δραστηριότητα



Στην οροσειρά Λευκά Όρη της Κρήτης ζει μια μοναδική ποικιλία αγριοκάτσικων, τα κρι-κρι. Όταν οι καιρικές συνθήκες βοηθήσουν την ανάπτυξη της βλάστησης, ο πληθυσμός των κρι-κρι αυξάνεται. Έτσι την επόμενη χρονιά η βλάστηση δεν επαρκεί για να ζήσουν. Οι οικολογικές οργανώσεις λοιπόν προσπαθούν να βοηθήσουν τα ζώα, ώστε να μην πεθάνουν από ασιτία. Κάθε χρόνο καταγράφουν τον πληθυσμό των κρι-κρι στα βουνά ώστε, αν χρειαστεί, να μετακινηθούν πληθυσμοί ζώων. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα δεδομένα μιας χρονιάς.

Ανατολική πλευρά	Δυτική πλευρά	Βόρεια πλευρά	Νότια πλευρά
11	17	22	62

- Κάθε πλευρά του βουνού μπορεί να θρέψει περίπου τον ίδιο αριθμό ζώων. Πού νομίζεις ότι χρειάζεται να επέμβουμε για να φέρουμε σε ισορροπία τον πληθυσμό;
- Τι νομίζεις πως πρέπει να γίνει για να σωθούν τα ζώα στη Νότια πλευρά;
- Χρησιμοποιώντας το σύμβολο «γιώτα» (Ι) να καταγράψεις με μολύβι στη δεύτερη στήλη σε πεντάδες (όπως έκανες στον πίνακα συχνοτήτων) τα ζώα που υπάρχουν σε κάθε πλευρά.

Πλευρά	Σύμβολα ζώων πριν τη μετακίνηση	Σύμβολα ζώων μετά τη μετακίνηση	Αριθμός ζώων μετά τη μετακίνηση
Ανατολική			
Δυτική			
Βόρεια			
Νότια			

- Μπορείς τώρα να μετακινείς ζώα στην επόμενη στήλη για να τα μοιράσεις στις πλευρές; (Σκέψου από πού θα πάρεις ζώα για να τα μοιράσεις; Από κάθε πλευρά;)
- Πόσα ζώα έχει τώρα κάθε πλευρά; ....
- Γράψε τον αριθμό στην επόμενη στήλη του πίνακα.
- Αν αναπαριστούσες μετά την ανακατανομή τον αριθμό των κρι-κρι με ένα ραβδόγραμμα πως θα ήταν το ραβδόγραμμα αυτό;
- Χωρίς να κάνεις όλες τις παραπάνω ενέργειες πως θα μπορούσες, στο τετράδιό σου, να λύσεις το πρόβλημα και να μοιράσεις τα κρι-κρι εξίσου σε όλες τις πλευρές του βουνού;

....

....

....

Στην παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώσαμε ότι υπάρχει ένας αριθμός ο οποίος δείχνει πόσα ζώα θα έχουμε σε κάθε πλευρά του βουνού, αν θελήσουμε να μοιράσουμε το σύνολο των ζώων όσο γίνεται πιο ισότιμα ανάμεσα στις πλευρές.

Μέσος όρος

Πολλές φορές χρειάζεται να περιγράψουμε ένα πλήθος δεδομένων με μια μόνο τιμή. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε το **μέσο όρο**.

Ο μέσος όρος, που λέγεται και **μέση τιμή**, υπολογίζεται προσθέτοντας τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρώντας το άθροισμα με το πλήθος των δεδομένων.

Παραδείγματα

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε έξι τεστ στα μαθηματικά ήταν 7, 10, 7, 8, 7 και 9. Ο μέσος όρος της βαθμολογίας του είναι:

(7 + 10 + 7 + 8 + 7 + 9) : 6 = 48 : 6 = 8

Το 8 είναι ο βαθμός που δείχνει περιληπτικά τις επιδόσεις του μαθητή στα τεστ.

Εφαρμογή

Το Υπουργείο Παιδείας ζητάει συχνά στατιστικά στοιχεία για τους μαθητές που τελειώνουν το δημοτικό σχολείο και εγγράφονται στο γυμνάσιο. Για το λόγο αυτό στο 4ο Γραφείο Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης της Θεσσαλονίκης η κ. Πόπη συγκέντρωσε τα δυναμολόγια (αριθμός μαθητών ανά τάξη) για όλα τα τμήματα της Στ΄ τάξης σε 20 σχολεία στο κέντρο της Θεσσαλονίκης. Ο αριθμός των μαθητών σε κάθε σχολείο φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

25	28	30	27	24	26	28	25	26	27	26	29	24	30	30	28	27	24	27	29

Πόσα παιδιά υπάρχουν κατά μέσο όρο στην Στ΄ τάξη στα σχολεία του κέντρου της πόλης της Θεσσαλονίκης;

Λύση:

Για να βρω το μέσο όρο των παιδιών θα πρέπει να αθροίσω τις τιμές όλων των τάξεων και το άθροισμα να το διαιρέσω με το πλήθος των τάξεων.

(25 + 28 + 30 + 27 + 24 + 26 + 28 + 25 + 26 + 27 + 26 + 29 + 24 + 30 + 30 + 28 + 27 + 24 + 27 + 29) : 20 =

540 : 20 = 27

Απάντηση: Ο μέσος όρος των μαθητών στην Στ΄ τάξη των σχολείων της Θεσσαλονίκης είναι 27 μαθητές.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε την έννοια του **μέσου όρου** (ή μέσης τιμής). Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα τι μας χρειάζεται;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Ο μέσος όρος είναι πάντα ακέραιος αριθμός.	❐	❐
Οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 10 έχουν μέση τιμή το 5.	❐	❐
Όταν οι σερβιτόροι αθροίζουν τα φιλοδωρήματα που μαζεύουν και μετά τα μοιράζονται, αυτό που παίρνει ο καθένας είναι ο μέσος όρος.	❐	❐

5η θεματική ενότητα

Μετρήσεις - Μοτίβα

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
49. Πόσο μακριά είπες;	Μετρώ το μήκος	119
50. Μπορώ να τα σηκώσω;	Μετρώ και λογαριάζω βάρη	121
51. Σταμάτα μια στιγμή!	Μετρώ το χρόνο	123
52. Όσο - όσο...	Μετρώ την αξία με χρήματα	125
53. Ωραίο σχέδιο!	Γεωμετρικά μοτίβα	127
54. Τι είναι αυτό που μας ενώνει;	Αριθμητικά μοτίβα	129
55. Πόσο μεγάλωσες!	Σύνθετα μοτίβα	131
Συγκρίνω και παρατηρώ	*Ανακεφαλαίωση για τις θεματικές ενότητες 4 και 5: Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων - Μετρήσεις - Μοτίβα*	133

Μετρήσεις – Μοτίβα

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τις μετρήσεις και τα μοτίβα.

Οι μετρήσεις είναι ίσως η εφαρμογή των μαθηματικών στην καθημερινή μας ζωή. Μετράμε αποστάσεις, διαστάσεις, το χρόνο, το βάρος και το κόστος.

Μπορείς να φανταστείς τη ζωή σου χωρίς όλες αυτές τις μετρήσεις;

Τα μοτίβα είναι η «μαγεία της επανάληψης». Θα έχεις δει υφαντά και κεντήματα ή χαλιά λαϊκής τέχνης. Ένα απλό σχέδιο επαναλαμβάνεται και δημιουργεί μια πολύ όμορφη σύνθεση. Στη ζωγραφική οι πίνακες του Esher είναι διάσημοι ακριβώς γι' αυτό το χαρακτηριστικό: για τα μοτίβα από τα οποία αποτελούνται.

Είναι εξαιρετικά προκλητικό να ψάχνεις για μοτίβα! Μόλις ανακαλύψεις το μοτίβο μπορείς να προβλέψεις τι ακολουθεί!

Καλή διασκέδαση ...

Κεφάλαιο 49ο

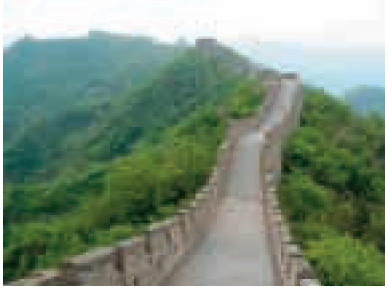
Μετρώ το μήκος

Πόσο μακριά είπες;

- *Μελετώ τις μετρήσεις μήκους στην καθημερινή ζωή και κατανοώ την ανάγκη για μια τυποποιημένη μονάδα μέτρησης.*
- *Μελετώ τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια του μέτρου καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους.*
- *Χρησιμοποιώ τα εργαλεία μέτρησης μήκους και εκφράζω τις μετρήσεις με διαφορετικούς αριθμούς.*

Δραστηριότητα 1η

Το Σινικό Τείχος της Κίνας χτίστηκε πριν από τουλάχιστον 2.000 χρόνια. Ο αυτοκράτορας που το κατασκεύασε διέταξε να γίνει έξι άλογα πλατύ στην κορυφή, οχτώ άλογα πλατύ στη βάση και ψηλό όσο πέντε άνθρωποι.



Φωτογραφία Joan Ho

- Ποια μονάδα μέτρησης χρησιμοποιήθηκε για το πλάτος του Τείχους και ποια για το ύψος; ....
....
- Μπορείς να υπολογίσεις πόσο περίπου είναι το ύψος του σε μέτρα;
....
- Πώς θα μπορούσες εσύ να μετρήσεις μια απόσταση αν δεν υπήρχε διαθέσιμο κάποιο εργαλείο μέτρησης;
....
- Τι προβλήματα δημιουργεί μια τέτοια μέτρηση; ....
- *«Η μάχη με τους Πέρσες έγινε στη Μυκάλη όπου ο πορθμός έχει πλάτος επτά στάδια».* Τι πληροφορίες μας δίνει η φράση αυτή για τη μέτρηση αποστάσεων στην αρχαία Ελλάδα; ....
....

Δραστηριότητα 2η

Η μονάδα μέτρησης αποστάσεων (μήκους, ύψους, πλάτους) που χρησιμοποιείται σήμερα σχεδόν παντού είναι το μέτρο. Ένα τμήμα του μέτρου είναι ο χάρακάς σου.

Αν προεκτείνεις το χάρακα μέχρι τα 100 εκατοστόμετρα θα έχεις ένα μέτρο

Η απόσταση ανάμεσα σε δύο μικρές γραμμούλες είναι ένα χιλιοστόμετρο

Δέκα χιλιοστόμετρα είναι ένα εκατοστόμετρο

- Αν θέλω να εκφράσω το μήκος της γάτας, του χρυσόψαρου και της σαύρας, θα το εκφράσω σε μέτρα ή σε εκατοστά;
- Αν θέλω να εκφράσω το μήκος της τίγρης, του δελφινιού και του κροκόδειλου, θα το εκφράσω σε μέτρα ή σε εκατοστά;
- Αν θέλω να συγκρίνω το μέγεθος της σαύρας και του κροκόδειλου (ή να υπολογίσω τη διαφορά τους) τι θα κάνω; ....
....
- Το Σινικό Τείχος έχει μήκος τρία εκατομμύρια μέτρα! Πόσα χιλιόμετρα νομίζεις ότι είναι; ....
....
- Εξήγησε πώς μετέτρεψες τα μέτρα σε χιλιόμετρα: ....

Διαπιστώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης μήκους το μέτρο, μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις που είναι ακριβείς και κατανοητές από όλους.

Παραδείγματα

Μετρήσεις μήκους, πράξεις ανάμεσα σε μετρήσεις

Το μήκος το μετράμε με το **μέτρο** και το εκφράζουμε σε χιλιοστά, εκατοστά, μέτρα και χιλιόμετρα. Μπορούμε να εκφράσουμε το μήκος με φυσικό, δεκαδικό, συμμιγή ή κλασματικό αριθμό.

Το μήκος του θρανίου μου είναι **1,20 μ.** ή **120 εκ.** ή **1 μ. 20 εκ.** ή $\frac{120}{100}$ **μ.**

Για να μετατρέψουμε τη μέτρηση από μικρότερη μονάδα σε μεγαλύτερη, διαιρούμε με τον κατάλληλο αριθμό. Αντίστοιχα, για να μετατρέψουμε από μεγαλύτερη μονάδα σε μικρότερη πολλαπλασιάζουμε.

Για να κάνουμε πράξεις ανάμεσα σε μετρήσεις μήκους, πρέπει οι μετρήσεις να εκφράζονται στην ίδια υποδιαίρεση (ή πολλαπλάσιο) του μέτρου και με αριθμούς της ίδιας μορφής.

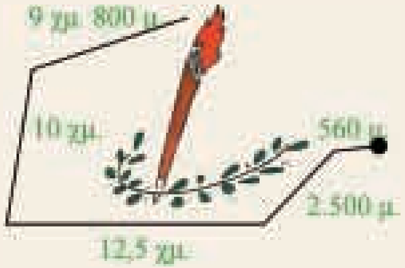
85 εκ. 1,36 μ.

Το συνολικό μήκος των τμημάτων είναι:
85 εκ. + 136 εκ. = 221 εκ. ή 2,21 μ.

Σημείωση: Το τμήμα του μέτρου που αποτελείται από 10 εκατοστόμετρα ονομάζεται δεκατόμετρο.

Εφαρμογή

Στο διπλανό σχεδιάγραμμα φαίνονται οι τελευταίοι σταθμοί στη διαδρομή της ολυμπιακής φλόγας μέχρι το βωμό του Σταδίου στην Αθήνα το 2004. Υπολόγισε την απόσταση που διάνυσαν οι λαμπαδηδρόμοι μεταφέροντας τη φλόγα σε αυτή τη διαδρομή.



Λύση:

Θα προσθέσουμε τις πέντε αυτές αποστάσεις.

1. Θα μετατρέψουμε όλες τις μετρήσεις σε χιλιόμετρα:
   Ο συμμιγής αριθμός 9 χμ. 800 μ. θα γίνει δεκαδικός .... χμ.
   Οι μετρήσεις που είναι σε μέτρα πρέπει να διαιρεθούν με το 1000.
   Έτσι το 560 μ. θα γίνει .... χμ. και το 2.500 μ. θα γίνει .... χμ.
2. Θα κάνουμε την πρόσθεση: ....+............+............+............+...........=............. χμ.

Απάντηση: Οι λαμπαδηδρόμοι των τελευταίων σταθμών διάνυσαν .... χιλιόμετρα ή .... μέτρα μέχρι το Στάδιο.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το **μέτρο**, τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσιά του. Να εκφράσεις μια μέτρηση που έκανες, με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Για να μετατρέψουμε τα εκατοστόμετρα σε μέτρα διαιρούμε με το 100.	❐	❐
0,62 χιλ. = 620 εκ.	❐	❐
Για να μετατρέψουμε μία μεγαλύτερη μονάδα (όπως τα χιλιόμετρα) σε μία μικρότερη (όπως τα μέτρα) πολλαπλασιάζουμε.	❐	❐

Κεφάλαιο 50ό

Μετρώ και λογαριάζω βάρη

Μπορώ να τα σηκώσω;

Μελετώ τις μετρήσεις βάρους στην καθημερινή ζωή.
Μελετώ την υποδιαίρεση και το πολλαπλάσιο του κιλού καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους.
Εκφράζω τις μετρήσεις βάρους με αριθμούς διαφορετικής μορφής.

Δραστηριότητα 1η

Στο πρόγραμμα Αγωγής Υγείας στο οποίο συμμετείχαν τα παιδιά έμαθαν ότι το μεγαλύτερο βάρος που επιτρέπεται να σηκώνει ένας μαθητής χωρίς να κινδυνεύει είναι ίσο με το 10% του σωματικού του βάρους!

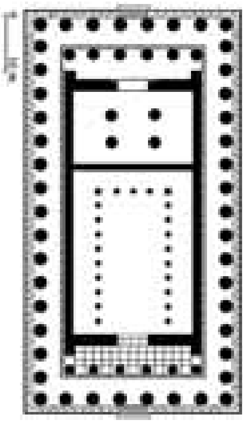
- Ποια μονάδα μέτρησης χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε το βάρος των σωμάτων;
- Πώς μπορείς να βρεις το βάρος σου;.. ....
- Με πόσους τρόπους μπορείς να βρεις το βάρος της τσάντας σου;..

  ....
- Πώς θα διαπιστώσεις αν η τσάντα σου έχει το επιτρεπτό βάρος; ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

Ο Παρθενώνας είναι ένα μοναδικό έργο της παγκόσμιας αρχιτεκτονικής. Το χτίσιμό του ήταν ένα πολύ δύσκολο επίτευγμα αν σκεφτεί κανείς, ότι οι κολόνες που τον απαρτίζουν, είναι τεράστια κομμάτια από μάρμαρο και έχουν μεταφερθεί από την Πεντέλη που βρίσκεται 19 χιλιόμετρα μακριά! Οι εξωτερικές κολόνες μόνο, υπολογίζεται ότι ζυγίζουν η καθεμία κατά μέσο όρο 90 τόνους!



- Μελετώντας τη διπλανή κάτοψη του Παρθενώνα, όπου κάθε μαύρος κύκλος παριστάνει μία κολόνα, υπολόγισε το βάρος του μαρμάρου που χρησιμοποιήθηκε για όλες τις εξωτερικές κολόνες:

  ....
- Θα εκφράσεις τη μέτρηση αυτή σε γραμμάρια, σε κιλά ή σε τόνους;

  ....
- Ανάφερε δύο υλικά σώματα των οποίων το βάρος να εκφράζεται σε

  γραμμάρια: ....

  κιλά: ....

  τόνους : ....
- Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο μετρήσεις βάρους που η μία να εκφράζεται σε τόνους και η άλλη σε κιλά, τι κάνουμε; [*Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε τη διαφορά στο βάρος του ενήλικου ελέφαντα (5 τόνοι) και του νεογέννητου μικρού του (150 κιλά)*].

  ....

  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το βάρος των υλικών σωμάτων, όσο μικρά ή μεγάλα κι αν είναι αυτά, και να εκφράσουμε τις μετρήσεις χρησιμοποιώντας το κιλό, το γραμμάριο ή τον τόνο.

Μετρήσεις βάρους, πράξεις ανάμεσα σε μετρήσεις

Μονάδα μέτρησης του βάρους είναι το **κιλό (κ.)** ή **χιλιόγραμμο** (**χγρ.** ή **kg**). Υποδιαίρεση του κιλού είναι το γραμμάριο (γρ. ή gr) και πολλαπλάσιό του ο τόνος (τόν. ή t). Τη μέτρηση μπορούμε να την εκφράσουμε με δεκαδικό, φυσικό ή συμμιγή αριθμό.

Για να μετατρέψουμε τη μέτρηση από μικρότερη μονάδα σε μεγαλύτερη, διαιρούμε με τον κατάλληλο αριθμό. Αντίστοιχα, για να μετατρέψουμε από μεγαλύτερη μονάδα σε μικρότερη πολλαπλασιάζουμε.

Για να κάνουμε πράξεις ανάμεσα σε μετρήσεις βάρους, πρέπει οι μετρήσεις να εκφράζονται στην ίδια υποδιαίρεση (ή πολλαπλάσιο) του κιλού και με αριθμούς της ίδιας μορφής.

Παραδείγματα

Το βάρος της τσάντας είναι **4,8 κιλά** ή **4.800 γρ.** ή **4 κιλά 800 γραμμάρια.**

2,5 κ. + 650 γρ. =
2,5 κ. + 0,65 κ. = 3,15 κ.

Εφαρμογή

Το βάρος ενός φύλλου φωτοτυπικού χαρτιού είναι 5 γραμμάρια. Ο δήμος Θεσσαλονίκης συγκέντρωσε σε ένα μήνα τις παρακάτω ποσότητες χαρτιού για ανακύκλωση από κάθε δημοτικό διαμέρισμα αντίστοιχα:

Α΄: **1 τόν.**, Β΄: **1 τόν. 500 κ.**, Γ΄: **1,59 τόν.**, Δ΄: **1.200 κ.**

Αν το σύνολο αυτής της ποσότητας γίνει ανακυκλωμένο χαρτί φωτοτυπικού, πόσα φύλλα ανακυκλωμένου χαρτιού θα γίνουν;

Λύση:

1. Για να προσθέσω τους παραπάνω αριθμούς, θα μετατρέψω όλες τις μετρήσεις σε τόνους ενώ παράλληλα θα μετατρέψω τον συμμιγή σε δεκαδικό:
   Α΄: **1 τόν.**, Β΄: **1 τόν. 500 κ. = 1,5 τόν.**, Γ΄: **1,59 τόν.**, Δ΄: **1.200 : 1.000 = 1,2 τόν.**
   (αν αποφασίσεις να μετατρέψεις τις μετρήσεις σε κιλά, τι θα γίνει ο συμμιγής; ....)
2. Βρίσκω με πρόσθεση τη συνολική ποσότητα: **1 + 1,5 + 1,59 + 1,2 = ... τόν.**
3. Θα μετατρέψω τους τόνους σε γραμμάρια για να κάνω διαίρεση μέτρησης:
   .... • 1.000.000 = ... γρ.
4. Κάνω τη διαίρεση: .... **: 5 =** ....

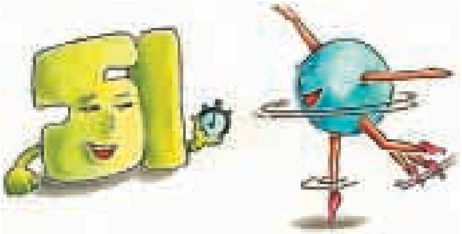
Απάντηση: Οι .... τόνοι χαρτιού που συγκεντρώθηκαν από το δήμο για ανακύκλωση θα μπορούσαν να γίνουν .... φύλλα ανακυκλωμένου φωτοτυπικού χαρτιού.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το **κιλό**, το **γραμμάριο** και τον **τόνο**. Να εκφράσεις μια μέτρηση βάρους, με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Για να μετατρέψουμε τα γραμμάρια σε τόνους διαιρούμε με το 1.000.	❐	❐
Για να μετατρέψουμε τους τόνους σε κιλά πολλαπλασιάζουμε με το 1.000.	❐	❐
$\frac{3}{4}$ *τόνου = 75.000 γραμμάρια*	❐	❐

Κεφάλαιο 51ο Μετρώ το χρόνο



Σταμάτα μια στιγμή!

Εκφράζω την ώρα με διαφορετικούς τρόπους.
Μελετώ τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια της ώρας καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους.
Μαθαίνω για τη διαφορά ώρας στα διάφορα μέρη της γης.
Λύνω προβλήματα σχετικά με χρονική διάρκεια.

Δραστηριότητα 1η

Στη διπλανή εικόνα βλέπεις ένα τμήμα από το τηλεοπτικό πρόγραμμα.

16:30	Εκπαιδευτική Τηλεόραση
17:00	Κινούμενα Σχέδια
17:45	Ειδήσεις, Καιρός
18:00	Ντοκιμαντέρ για τη φύση
19:00	Παιδική εκπομπή
21:30	Μουσική εκπομπή
00:30	Αθλητική εκπομπή
01:00	Ειδήσεις
01:10	Ξένη ταινία

- Ποιο πρόγραμμα έχει τη μεγαλύτερη διάρκεια;
- Ποιο έχει τη μικρότερη διάρκεια;
- Αν θέλεις να μαγνητοσκοπήσεις το πρόγραμμα εκπαιδευτικής τηλεόρασης και τα κινούμενα σχέδια, αρκεί να ρυθμίσεις την εγγραφή για 1 ώρα;
- Αν θέλεις να μαγνητοσκοπήσεις τη μουσική εκπομπή, για πόσες ώρες πρέπει να ρυθμίσεις την εγγραφή;
- Τι ώρα αρχίζει η αθλητική εκπομπή; ....
- Να εκφράσεις την ώρα 17:45 με όσους τρόπους μπορείς:

  ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

φωτογραφία: www.bigfoto.com

Το Γκρήνουιτς (**Greenwich**) είναι μια περιοχή του Λονδίνου, σε σχέση με την οποία έχει ρυθμιστεί η ώρα όλου του πλανήτη. Οι χώρες που βρίσκονται στα ανατολικά του Γκρήνουιτς είναι μπροστά στην ώρα και οι χώρες που βρίσκονται στα δυτικά του είναι πίσω στην ώρα. Η Αθήνα βρίσκεται στη ζώνη «ώρα Γκρήνουιτς + 2» (**GMT + 2**).

- Η πτήση Λονδίνο - Αθήνα διαρκεί 4 ώρες. Αν κάποιος αναχωρήσει από το Λονδίνο στις 9:30, θα προλάβει την πτήση από Αθήνα για Θεσσαλονίκη στις 14:30;

  Εξήγησε: ....

  ....
- Η πτήση Αθήνα - Λονδίνο αναχωρεί στις 18:30. Τι ώρα θα είναι στο Λονδίνο, όταν προσγειωθεί;

  Κάνε τις πράξεις: ....

Η μέτρηση του χρόνου είναι σχετική με την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της (μερόνυχτο) και την περιστροφή της γύρω από τον Ήλιο (έτος). Για πρακτικούς λόγους έχουμε χωρίσει την ημέρα σε 24 ίσα κομμάτια (ώρες) και υπολογίζουμε τη διάρκεια των δραστηριοτήτων μας με τις ώρες, τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσιά τους.

Μετρήσεις χρόνου -Υπολογισμός χρονικής διάρκειας	Παραδείγματα
Τα μικρά χρονικά διαστήματα τα μετρούμε με την **ώρα** και τις υποδιαιρέσεις της. 1 ώρα = 60 **λεπτά** (λ.), 1 λεπτό = 60 **δευτερόλεπτα** (δ.).	Το μάθημα διαρκεί 45 λεπτά ενώ το διάλειμμα μόνο 10.
Τα μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα τα μετράμε με την **ημέρα** (24 ώρες) και τα πολλαπλάσιά της: **εβδομάδα** (7 ημέρες), **μήνας** (30 ημέρες), **έτος** (12 μήνες). Για πολύ μεγάλες χρονικές περιόδους χρησιμοποιούμε τον **αιώνα** (100 έτη) ή τη **χιλιετία** (1.000 έτη).	Ο μέσος όρος ζωής του ανθρώπου είναι 75 χρόνια.
Τις ώρες μπορούμε να τις εκφράσουμε με 12ωρο τρόπο (π.μ. ή μ.μ.) ή 24ωρο. Όταν κάνουμε πράξεις ανάμεσα σε ώρες για να υπολογίσουμε μια χρονική διάρκεια, πρέπει να εκφράζουμε τις ώρες με 24ωρο τρόπο.	**8:15** μ.μ. σημαίνει 8 ώρες και 15 λεπτά μετά τις 12 το μεσημέρι, δηλαδή 8:15 + 12:00 = **20:15**
ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι ώρες και οι ημερομηνίες είναι συμμιγείς αριθμοί.	Το 6:30 **δεν είναι** 6,30.

Εφαρμογή 1η

Τα παιδιά πηγαίνουν στο σχολείο στις 8:15 π.μ. και σχολάνε στη 1:30 μ.μ. Πόσες ώρες μένουν στο σχολείο;

Λύση: Για να υπολογίσουμε τη χρονική διάρκεια ανάμεσα στην ώρα έναρξης και την ώρα λήξης των μαθημάτων πρέπει να βρούμε τη διαφορά τους.

1. Θα μετατρέψουμε την ώρα λήξης στον 24ωρο τρόπο έκφρασης: 1:30 +12 = 13:30

2. Θα κάνουμε την αφαίρεση των συμμιγών αριθμών:

13 ώρες 30 λεπτά
-8 ώρες 15 λεπτά
.... ώρες .... λεπτά

Απάντηση: Τα παιδιά μένουν στο σχολείο .... ώρες και ..... λεπτά.

Εφαρμογή 2η

Ο ποιητής Κωστής Παλαμάς γεννήθηκε στις 13 Ιανουαρίου 1859 και πέθανε στις 27 Φεβρουαρίου 1943. Πόσο έζησε;

Λύση: Κάνω την αφαίρεση των συμμιγών αριθμών:

1943 έτη 2 μήνες 27 ημέρες
-1859 έτη 1 μήνας 13 ημέρες
....

Απάντηση: Έζησε ....έτη ....μήνες ..... ημέρες

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τις **μονάδες μέτρησης του χρόνου**. Ανάφερε όλες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη, με τη σχέση που συνδέει τη μία με την άλλη.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Για να μετατρέψουμε 3 μήνες σε ώρες πολλαπλασιάζουμε 3 • 30	❒	❒
Για να μετατρέψουμε τα έτη σε χιλιετίες πολλαπλασιάζουμε με το 1000.	❒	❒
$2\frac{3}{4}$ *ώρες + 30 λεπτά = 3 ώρες 15 λεπτά .*	❒	❒

Κεφάλαιο 52ο Μετρώ την αξία με χρήματα

Όσο – όσο ...

Μελετώ το ΕΥΡΩ, μαθαίνω τι είναι ισοτιμία νομισματικών μονάδων.
Μαθαίνω τι είναι ο τόκος και το επιτόκιο.
Λύνω προβλήματα σχετικά με χρήματα.

Δραστηριότητα 1η

Φαντάσου να έπρεπε, για να πάρεις μια μπλούζα, να δώσεις ένα καλάθι μήλα! Από πολύ νωρίς οι άνθρωποι κατάλαβαν ότι η μέθοδος της ανταλλαγής είναι «άβολη» και χρησιμοποίησαν για το εμπόριο τα χρήματα με συμφωνημένη αξία.

- Να κάνεις μια κατάσταση με κάποια πράγματα που θα ήθελες να ψωνίσεις:
- Πόσα λεφτά θα έπαιρνες μαζί σου για τα ψώνια αυτά;

  ....

- Όταν αγοράζεις κάθε προϊόν έχεις το ακριβές αντίτιμο;
- Αν όχι, περίγραψε τι γίνεται στην περίπτωση αυτή:

  ....

  ....

  ....

- Γιατί οι χώρες στην Ευρωπαϊκή Ένωση χρησιμοποιούν το ίδιο νόμισμα;

Δραστηριότητα 2η

Οι τράπεζες είναι ιδρύματα που διαχειρίζονται χρήματα.

Όταν μας δανείζει χρήματα η τράπεζα, πληρώνουμε ένα ποσό (**τόκος**), το οποίο είναι ένα ποσοστό του χρηματικού ποσού που δανειστήκαμε. Η τράπεζα το υπολογίζει σύμφωνα με ένα ποσοστό στα 100 (**επιτόκιο**) που έχει ορίσει για αμοιβή. Αντίθετα, όταν εμείς καταθέτουμε χρήματα στην τράπεζα, τότε η τράπεζα πληρώνει τόκο σε εμάς (που τον υπολογίζει πάλι σύμφωνα με κάποιο επιτόκιο).

Θυμάσαι τα ποσοστά; Για να βρεις τον τόκο που θα πληρώσεις ή θα πάρεις θα εργαστείς όπως στα προβλήματα με ποσοστά.

- Η Τράπεζα προσφέρει επιτόκιο 2% το χρόνο για τις καταθέσεις. Πόσο τόκο θα πάρεις σε ένα χρόνο αν καταθέσεις 1.000 €;

Εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο το υπολόγισες: ....

....

- Η Τράπεζα ζητάει επιτόκιο 8% το χρόνο για τα δάνεια! Πόσο τόκο θα πληρώσεις σε ένα χρόνο αν δανειστείς 1.000 €;

  Εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο το υπολόγισες: ....

  ....

Τα χρήματα χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν την αξία ενός αντικειμένου ή μιας υπηρεσίας. Με χρήματα αγοράζουμε ή πουλάμε αντικείμενα και υπηρεσίες.

Νομισματική μονάδα, επιτόκιο, τόκος

Κάθε κράτος έχει τη δική του νομισματική μονάδα. Στην Ενωμένη Ευρώπη όμως, τα περισσότερα κράτη έχουν κοινή νομισματική μονάδα: το **ΕΥΡΩ (€).** 1 **€** = 100 **λεπτά**
Αν θέλουμε να αλλάξουμε τα ΕΥΡΩ με νομίσματα άλλων κρατών, η τράπεζα θα ελέγξει την ισοτιμία των νομισμάτων.

Όταν καταθέτουμε ή δανειζόμαστε χρήματα, παίρνουμε ή πληρώνουμε αντίστοιχα ένα ποσό για την πράξη αυτή. Το ποσό αυτό λέγεται **τόκος.**
Επιτόκιο είναι ο τόκος για 100 € για ένα έτος.

Παραδείγματα

Το νόμισμα της Αμερικής είναι το δολάριο ($) 1$ = 100 σεντς

Βρες την ισοτιμία δολαρίου και ΕΥΡΩ ....

Δανείζομαι 100 € με επιτόκιο 5%. Σε ένα χρόνο δίνω 5 € τόκο.
Δανείζω 100 € με επιτόκιο 2%. Σε ένα χρόνο θα πάρω 2 € τόκο.

Εφαρμογή 1η ***Διαχειρίζομαι χρήματα***

Είσαι έμπορος παιχνιδιών και σκέφτεσαι να εισάγεις παιχνίδια από την Κίνα. Τι πρέπει να υπολογίσεις, για να βρεις πόσο πρέπει να πουλήσεις κάθε παιχνίδι στην ελληνική αγορά και να έχεις κέρδος;

Λύση - Απάντηση:

1. Πρέπει να υπολογίσω, σύμφωνα με την ισοτιμία των νομισμάτων (με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση), πόσο στοιχίζουν τα παιχνίδια σε ΕΥΡΩ.
2. Μετά θα προσθέσω στην τιμή αγοράς το κόστος μεταφοράς των παιχνιδιών.
3. Θα διαιρέσω για να βρει πόσο μου κοστίζει κάθε παιχνίδι μετά τη μεταφορά.
4. Θα υπολογίσω τους φόρους.
5. Στο τελικό κόστος του παιχνιδιού θα προσθέσω το επιθυμητό κέρδος.
6. Η τιμή πώλησης στην Ελλάδα είναι ανταγωνιστική σε σχέση με τα ελληνικά παιχνίδια;

Εφαρμογή 2η ***Εξόφληση δανείου***

Η κυρία Τζεκάκη, για να αγοράσει ένα αυτοκίνητο, πήρε δάνειο από την Τράπεζα 8.000 € με επιτόκιο 12%. Πόσο τόκο θα έχει πληρώσει όταν εξοφλήσει το δάνειο σε δύο χρόνια;

Λύση:

Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με όποια από τις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων με ποσοστά θέλουμε. Ένας τρόπος είναι εφαρμόζοντας την αναλογία:

$\left(\frac{\text{τόκος}}{\text{κεφάλαιο}}\right) \frac{12}{100} = \frac{x}{8000}$ *Επομένως* $100 \cdot x = 12 \cdot 8000$ *Άρα* $x = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $x = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $x = \ldots\ldots\ldots$

Αυτό που βρήκαμε είναι ο τόκος για ένα έτος. Άρα .... • 2 = ...

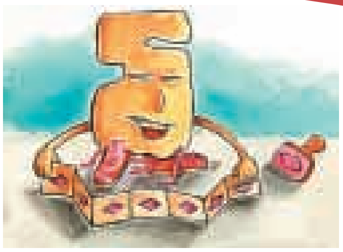
Απάντηση: Όταν εξοφλήσει το δάνειο η κ. Τζεκάκη, εκτός από το κεφάλαιο των 8.000 € που δανείστηκε, θα έχει πληρώσει και .... € τόκο.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη **νομισματική μονάδα ΕΥΡΩ (€)** και τους όρους **τόκος** και **επιτόκιο.**
Να χρησιμοποιήσεις τους όρους αυτούς σε ένα δικό σου παράδειγμα.
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Για 100 ΕΥΡΩ πήραμε 120 δολάρια. Άρα η ισοτιμία ήταν: 1 € = 1,2 $.	❐	❐
Αν καταθέσω 1.000 € με επιτόκιο 2%, σε 6 μήνες θα πάρω τόκο 20 €.	❐	❐
3.500 λεπτά = 350 €	❐	❐

Κεφάλαιο 53ο Γεωμετρικά μοτίβα

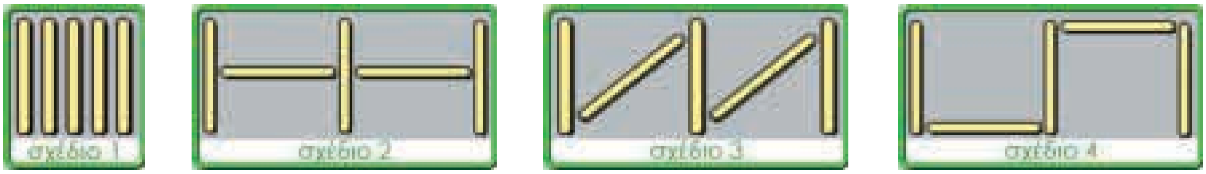


Ωραίο σχέδιο!

Αναγνωρίζω γεωμετρικά μοτίβα.
Κατανοώ ότι τα μοτίβα περιγράφουν μια κανονική ή προβλέψιμη αλλαγή.
Περιγράφω μοτίβα και συνεχίζω την ακολουθία.

Δραστηριότητα 1η

Οι παρακάτω εικόνες είναι από ένα διαφημιστικό φυλλάδιο με σχέδια για φράχτες.



- Για να καταλάβεις πως θα είναι ο φράχτης, χρειάζεται να υπάρχει μεγαλύτερο τμήμα του στην εικόνα;

  ....

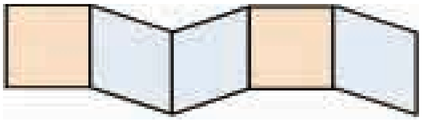
- Γιατί συμβαίνει αυτό; (Ποιο είναι το κοινό χαρακτηριστικό όλων των παραπάνω σχεδίων;)

  ....

- Χρησιμοποιώντας ξυλάκια, να φτιάξεις ένα δικό σου δείγμα για φράχτη.

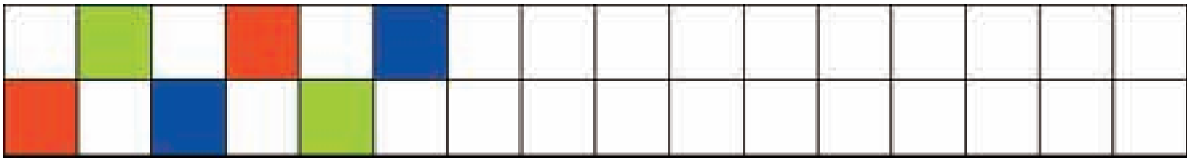
Δραστηριότητα 2η

Παρακάτω βλέπεις ένα τμήμα από μια διακοσμητική κατασκευή.



- Να συνεχίσεις την κατασκευή ώστε τα κουτάκια να γίνουν επτά.

  Χρησιμοποίησε χρωματιστούς κύβους κατασκευών (ή χρωματιστά χαρτάκια) για να φτιάξεις ένα σχέδιο όπως το παρακάτω.



- Να συνεχίσεις την κατασκευή ώστε να φαίνονται δέκα χρωματιστά κουτάκια.
- Εξήγησε τι χρειάστηκε να παρατηρήσεις για να συνεχίσεις την ακολουθία και στις δύο περιπτώσεις:

  ....

  ....

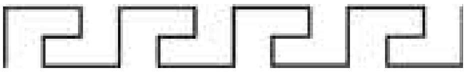
- Χρησιμοποίησε χρωματιστούς κύβους κατασκευών (ή χρωματιστά χαρτάκια) για να φτιάξεις ένα δικό σου σχέδιο που επαναλαμβάνεται.

Πολλές φορές, για να αναλύσουμε ένα σύνθετο πρόβλημα, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε αν υπάρχει κάποιο στοιχείο που επαναλαμβάνεται.

Γεωμετρικά μοτίβα

Το στοιχείο που επαναλαμβάνεται και δημιουργεί ένα σχέδιο ονομάζεται **γεωμετρικό μοτίβο.**

Παραδείγματα



Αρχαίος ελληνικός μαίανδρος

Για να δημιουργήσουμε ή να επεκτείνουμε ένα σχέδιο με επαναλαμβανόμενα μέρη, αρκεί να γνωρίζουμε το μοτίβο του και τον τρόπο με τον οποίο αυτό επαναλαμβάνεται.

Εφαρμογή 1η ***Μοτίβα στη φύση***

Ποιο είναι το μοτίβο στη δημιουργία της κηρήθρας των μελισσών;

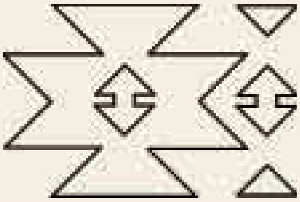
Λύση - Απάντηση:

Παρατηρώντας το σύνθετο σχέδιο μια κηρήθρας μελισσών, διαπιστώνουμε ότι το μοτίβο που επαναλαμβάνεται είναι ένα κανονικό εξάγωνο (δηλαδή ένα εξάγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες). Το ένα εξάγωνο με το άλλο εφάπτονται στη μία πλευρά.

Εφαρμογή 2η ***Μοτίβα στην τέχνη***

Στην Ελλάδα, αλλά και σε πολλές άλλες χώρες, δημιουργήθηκαν από τους λαϊκούς πολιτισμούς υπέροχα μοτίβα που χρησιμοποιήθηκαν για κατασκευή κουβερτών ή χαλιών. Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένα χαλί με παραδοσιακό ελληνικό σχέδιο. Προσπαθήστε να διακρίνετε το μοτίβο και να το σχεδιάσετε πιο κάτω.

Λύση - Απάντηση:



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **γεωμετρικό μοτίβο**. Να αναφέρεις ένα δικό σου παράδειγμα με κάποιο σχέδιο βασισμένο σε ένα μοτίβο.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Τα βήματα στο χορό αποτελούν ένα μοτίβο.	❐	❐
Το μοτίβο ενός σχεδίου με βοηθά να προβλέψω τη συνέχειά του.	❐	❐
Όλα τα σχέδια βασίζονται σε κάποιο μοτίβο.	❐	❐

Κεφάλαιο 54ο

Αριθμητικά μοτίβα

Τι είναι αυτό που μας ενώνει;

Αναγνωρίζω αριθμητικά μοτίβα.
Βρίσκω τον κανόνα ενός αριθμητικού μοτίβου και συνεχίζω την ακολουθία.
Διακρίνω αν υπάρχει μοτίβο σε ένα πρόβλημα και το χρησιμοποιώ για τη λύση.

Δραστηριότητα 1η

Διαβάστε μια αστεία ιστορία:

Μια μέρα ο πατέρας του Τοτού του έδωσε 1 €. Εκείνος, όταν βρήκε το φίλο του, άλλαξε το ΕΥΡΩ του με δύο πενηντόλεπτα, γιατί σκέφτηκε ότι «*δύο είναι καλύτερα από ένα*». Αργότερα άλλαξε τα δύο πενηντόλεπτα με τρία εικοσάλεπτα καθώς σκέφτηκε ότι «*τρία είναι καλύτερα από δύο*». Μετά τα άλλαξε κι αυτά με τέσσερα δεκάλεπτα και, περήφανος πια, πήγε να πει στον πατέρα του το κατόρθωμά του!

- Ποιο νόμιζε ο Τοτός ότι ήταν το κατόρθωμά του; ....

  ....

- Τι προσπαθούσε να κάνει κάθε φορά; ....

- Μπορείς να περιγράψεις τα βήματα που ακολούθησε το παιδί με ένα μοτίβο;

  ....

- Αν συνέχιζε τις αλλαγές, σύμφωνα με το μοτίβο που ακολουθούσε, με τι θα άλλαζε τα τέσσερα δεκάλεπτά του; ....

Δραστηριότητα 2η

Δίπλα φαίνεται μια σελίδα του ημερολογίου.

Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ	Κ
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

- Προσπαθήστε να ανακαλύψετε το μοτίβο στη σειρά των αριθμών στην πράσινη στήλη:

  2, 9, 16,______ ,______ : ....

- Προσπαθήστε τώρα να ανακαλύψετε το μοτίβο στη σειρά των αριθμών στα μοβ κουτάκια:

  7, 13, 19,______ ,______ ,______ : ....

- Μπορείτε να διαλέξετε κάποια άλλα κουτάκια και να ανακαλύψετε ένα μοτίβο.

  ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι σε μια σειρά αριθμών πολλές φορές είναι χρήσιμο να αναζητήσουμε αν υπάρχει κάποιος κανόνας που ορίζει τη σειρά αυτή, με σκοπό να προβλέψουμε τον αριθμό που θα ακολουθήσει.

Αριθμητικό μοτίβο

Σε μια σειρά αριθμών που υπάρχει μια σχέση σταθερή και επαναλαμβανόμενη ανάμεσα στους αριθμούς, ο κανόνας που ορίζει τη σχέση αυτή και μας δείχνει πώς δημιουργήθηκε η σειρά των αριθμών λέγεται **αριθμητικό μοτίβο.** (π.χ. 5, 10, 15, 20, 25, ... α, α+5)

Αυτή τη διαδοχή των αριθμών τη λέμε **ακολουθία** και κάθε αριθμός λέγεται **όρος** της ακολουθίας.

Εφαρμογή 1η **Χρήσιμες προβλέψεις**

Ο Βρετανός αστρονόμος Edmond Halley (Χάλεϋ) μελετώντας τις ημερομηνίες εμφάνισης ενός κομήτη, πρόβλεψε πότε θα εμφανιστεί ξανά. Η πρόβλεψή του επαληθεύτηκε και ο κομήτης ονομάστηκε «κομήτης του Halley» προς τιμή του αστρονόμου.
Εξέτασε κι εσύ τις ημερομηνίες, όπως ο Halley, και προσπάθησε να ανακαλύψεις το μοτίβο και να κάνεις πρόβλεψη για την ημερομηνία της επόμενης εμφάνισης του κομήτη.
1454, 1530, 1606, 1682, ...

Λύση:

1. Εξετάζω τη σχέση που έχει ο πρώτος αριθμός με τον δεύτερο. Βρίσκω τη διαφορά τους: 1530 – 1454 = 76
2. Κατόπιν βρίσκω τη διαφορά του δεύτερου και του τρίτου: 1606 – 1530 = 76
3. Συνεχίζω με το επόμενο ζευγάρι αριθμών: 1682 – 1606 = 76

Το μοτίβο είναι: προσθέτω 76 χρόνια στην προηγούμενη ημερομηνία.

Απάντηση: Η επόμενη εμφάνιση του κομήτη θα συμβεί το 1758.

Πράγματι, ο κομήτης εμφανίστηκε την παραμονή των Χριστουγέννων του 1758. Δυστυχώς ο Halley είχε πεθάνει το 1742. Έτσι δεν πρόλαβε να δει ότι η πρόβλεψή του ήταν σωστή.

Εφαρμογή 2η

Να συμπληρώσετε την ακολουθία: 6, 60, 600, 6.000, _______, ________ με τους δύο επόμενους αριθμούς:

Λύση :

Εξετάζοντας τη σχέση που έχουν οι αριθμοί μεταξύ τους, καταλαβαίνω ότι ο καθένας προκύπτει όταν πολλαπλασιάσουμε τον προηγούμενο με το 10.

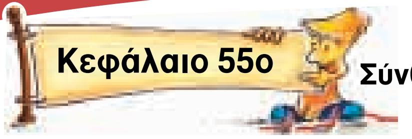
Απάντηση: Άρα οι επόμενοι αριθμοί είναι οι : 60.000 και 600.000

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αριθμητικό μοτίβο**. Να αναφέρεις ένα δικό σου παράδειγμα με κάποιους αριθμούς που ακολουθούν ένα μοτίβο.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Όλες οι ακολουθίες αριθμών αποτελούν αριθμητικά μοτίβα.	❒	❒
Στην ακολουθία 9, 18, 27, 36, 45, 54, ... α, ... το μοτίβο είναι: α • 9	❒	❒
Βρίσκω το μοτίβο μιας ακολουθίας εξετάζοντας τη σχέση των αριθμών.	❒	❒

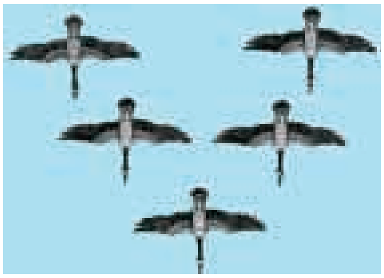


Σύνθετα μοτίβα

Πόσο μεγάλωσες!

Αναγνωρίζω σύνθετα μοτίβα.
Χρησιμοποιώ πίνακα για να περιγράψω ένα μοτίβο.
Διακρίνω αν υπάρχει μοτίβο σε ένα πρόβλημα και το χρησιμοποιώ για τη λύση.

Δραστηριότητα 1η



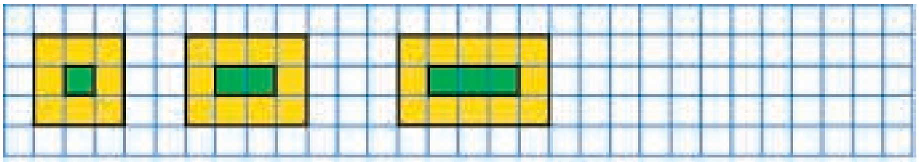
Κάποια είδη πουλιών, όταν πετούν, σχηματίζουν σμήνη σε διάταξη V. Το πιο δυνατό πουλί πετά μπροστά μόνο του. Τα υπόλοιπα ακολουθούν σε ζευγάρια.
Στο παρακάτω σχήμα κάθε κύκλος αναπαριστά ένα πουλί του σμήνους. Παρατήρησε ένα μικρό σμήνος πουλιών και ένα μεγαλύτερο.

- Να περιγράψεις πώς αλλάζει το σμήνος των πουλιών, καθώς μεγαλώνει: ....
....
- Πόσα ζευγάρια πουλιών υπάρχουν στα σμήνη του σχήματος (εκτός από το πρώτο πουλί); 1ο: .... 2ο: ....
- Να σχεδιάσεις δίπλα τους το αμέσως μεγαλύτερο σμήνος.
- Αν ορίσουμε το μέγεθος του σμήνους, σύμφωνα με τον αριθμό των ζευγαριών, να συμπληρώσεις τον διπλανό πίνακα.
- Διακρίνεις κάποιο μοτίβο στο πίνακα; ....
- Πόσα πουλιά έχει το σμήνος 10 (με 10 ζευγάρια); ....
- Πώς το υπολόγισες; ....

Μέγεθος σμήνους	Αριθμός πουλιών
1	3
2	5
3	
4	
5	

Δραστηριότητα 2η

Σε χαρτί γραφημάτων (μιλιμετρέ) έχουμε σχεδιάσει τρία παρτέρια για λουλούδια με μια “κορνίζα” από πλάκες γύρω τους.



Μέγεθος παρτεριού	1	2	3	4
Αριθμός πλακών	8	10		

- Να σχεδιάσεις δίπλα τους το επόμενο παρτέρι, συνεχίζοντας την ακολουθία.
- Συμπλήρωσε τον πίνακα.
- Βρες πόσες πλάκες θα έχει το παρτέρι «μέγεθος 10» και εξήγησε πώς το βρήκες: ....
....

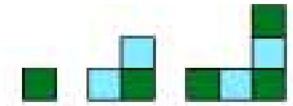
Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι, μπορούν να δημιουργηθούν σχέδια που να ακολουθούν ταυτόχρονα και γεωμετρικό και αριθμητικό μοτίβο.

Σύνθετο μοτίβο

Σε ένα σχέδιο που ακολουθεί τόσο γεωμετρικό όσο και αριθμητικό μοτίβο, ενώ διακρίνουμε εύκολα το γεωμετρικό μοτίβο, για να διακρίνουμε το αριθμητικό μοτίβο συχνά χρειάζεται να καταγράψουμε τα δεδομένα σε έναν πίνακα.

Εξετάζουμε την αλλαγή καθώς αυξάνεται το μέγεθος του σχεδίου, προσπαθούμε να διακρίνουμε αυτό που μένει σταθερό από αυτό που αλλάζει και να ανακαλύψουμε έναν κανόνα για την αλλαγή αυτή.

Παραδείγματα

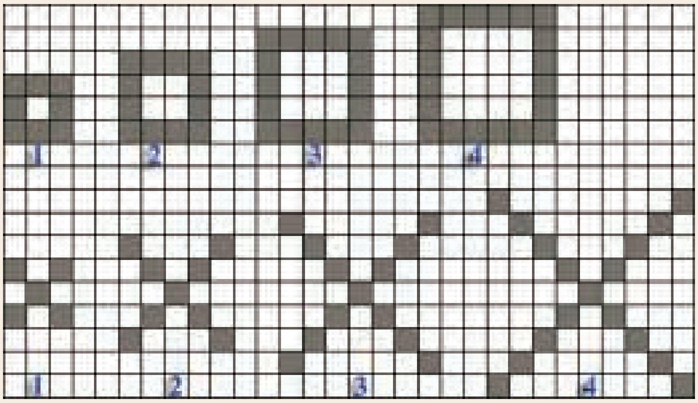


Μέγεθος σχήματος	1	2	3
Αριθμός τετραγώνων	1	3	5

Το αριθμητικό μοτίβο είναι «+ 2 στο προηγούμενο μέγεθος».

Εφαρμογή ***Μεγαλώνω τα γράμματά μου***

Προσπάθησε να βρεις το μοτίβο σύμφωνα με το οποίο «μεγαλώνει» το γράμμα **Ο** και το γράμμα **Χ**. "Μεγαλώνουν" σύμφωνα με το ίδιο μοτίβο;



Λύση:

Μπορούμε να βρούμε το μοτίβο σύμφωνα με το οποίο μεγαλώνει κάθε γράμμα, αν καταγράψουμε σε έναν πίνακα το μέγεθός του και τον αριθμό των τετραγώνων που το αποτελούν.

γράμμα Ο

Μέγεθος	Αριθμός τετραγώνων
1	8
2	12
3	16
4	20

γράμμα Χ

Μέγεθος	Αριθμός τετραγώνων
1	5
2	9
3	13
4	17

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι η βασική διαφορά τους είναι στο γεωμετρικό μοτίβο. Το αριθμητικό μοτίβο και για τα δύο γράμματα είναι «+ 4 στο προηγούμενο μέγεθος», ενώ διαφέρει ο αρχικός αριθμός των τετραγώνων του καθενός.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **σύνθετο μοτίβο.** Να αναφέρεις ένα δικό σου παράδειγμα με κάποιο σύνθετο μοτίβο ή να σχεδιάσεις ένα σύνθετο μοτίβο.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Για να συνεχίσω την ακολουθία σε ένα σύνθετο μοτίβο, αρκεί να αναγνωρίσω το αριθμητικό μοτίβο.	❒	❒
Δύο σύνθετα μοτίβα είναι δυνατό να έχουν το ίδιο αριθμητικό μοτίβο.	❒	❒
Ένα σχήμα που μεγαλώνει ακολουθεί γεωμετρικό και αριθμητικό μοτίβο.	❒	❒

Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων - Μετρήσεις - Μοτίβα

Συγκρίνω και παρατηρώ

Στατιστικά στοιχεία	**Γραφήματα**	Είναι η οπτική αναπαράσταση των δεδομένων. Διαφορετικοί τύποι γραφημάτων παρουσιάζουν τα δεδομένα με διαφορετικό τρόπο.
	• εικονόγραμμα • ραβδόγραμμα • γράφημα γραμμής • κυκλικό διάγραμμα	• χρησιμοποιεί ένα σύμβολο που αναπαριστά τα δεδομένα • αναπαριστά τα δεδομένα σε ράβδους ή στήλες. • μια γραμμή αναπαριστά την εξέλιξη των δεδομένων • αναπαριστά τα δεδομένα ως κομμάτια μιας κυκλικής «πίτας»
	Πίνακας κατανομής συχνοτήτων	• Είναι ένας εύκολος και γρήγορος τρόπος για να καταγράψουμε το πόσο συχνά εμφανίζεται κάθε δεδομένο μας. Χρησιμοποιούμε για κάθε εμφάνιση δεδομένου μια κάθετη γραμμή για τις πρώτες τέσσερις εμφανίσεις και μια οριζόντια για την πέμπτη εμφάνιση (𝍸)
	Μέσος όρος	• προσθέτουμε όλες τις τιμές και διαιρούμε το άθροισμα με το πλήθος
Μετρήσεις	• μήκος	• 1 μέτρο = 100 εκατοστόμετρα = 1000 χιλιοστόμετρα 1 χιλιόμετρο = 1000 μέτρα
	• βάρος	• 1 κιλό = 1000 γραμμάρια 1 τόνος = 1000 κιλά
	• χρόνος	• 1 ώρα = 60΄ = 3600΄΄ ημέρα, εβδομάδα, μήνας, έτος, αιώνας
	• χρήματα • τόκος • επιτόκιο	• 1 € = 100 λεπτά • ποσό που πληρώνουμε επιπλέον, όταν δανειζόμαστε χρήματα (ή μας δίνει η τράπεζα επιπλέον, όταν καταθέτουμε χρήματα) • ο τόκος για 100 € για ένα έτος
Μοτίβα	• γεωμετρικό	• ο τρόπος που επαναλαμβάνεται ένα στοιχείο που δημιουργεί ένα σχέδιο
	• αριθμητικό	• κανόνας που ρυθμίζει τη σχέση που έχει ένας αριθμός με τον επόμενό του σε μια αριθμητική ακολουθία
	• σύνθετο	• κανόνας που ρυθμίζει μια σχέση σύμφωνα με την οποία μεγαλώνει ένα μοτίβο

1ο Πρόβλημα

Τι είδους γράφημα θα χρησιμοποιούσες για να καταγράψεις την αλλαγή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της ημέρας; Κάνε μια καταγραφή και παρουσίασέ τη με γράφημα. Επίσης βρες το μέσο όρο της θερμοκρασίας για τη συγκεκριμένη ημέρα.

Λύση - Απάντηση:

2ο Πρόβλημα

Το φως διανύει 300.000 χιλιόμετρα /δευτερόλεπτο. Για να φτάσει το φως από τον Ήλιο στη Γη χρειάζεται 8΄ και 30΄΄. Να υπολογίσεις την απόσταση Ήλιου - Γης και να την εκφράσεις με δύναμη του 10. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις υπολογιστή τσέπης για τις πράξεις.

Λύση

Απάντηση: ....

3ο Πρόβλημα

Φτιάξε με την ομάδα σου ένα πρόβλημα σχετικό με την αγορά ενός αντικειμένου με δόσεις το οποίο θα αναφέρεται στο επιτόκιο, στον τόκο, στην αρχική και την τελική τιμή.

....

....

....

....

....

....

....

Λύση

Απάντηση: ....

4ο Πρόβλημα

Δημιούργησε μια αριθμητική ακολουθία που να βασίζεται σε κάποιο μοτίβο. Γράψε όσους όρους της νομίζεις ότι χρειάζεται για να φαίνεται το μοτίβο, αλλά μην ανακοινώσεις το μοτίβο. Αντάλλαξε με τον διπλανό ή τη διπλανή σου και προσπαθήστε να αναγνωρίσετε ο ένας το μοτίβο του άλλου και να συνεχίσετε την ακολουθία του.

Λύση

Απάντηση: *Το μοτίβο είναι:* ....

6η θεματική ενότητα

Γεωμετρία

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
56. Τα σχήματα του κόσμου!	Γεωμετρικά σχήματα – Πολύγωνα	137
57. Μεγάλη α...γωνία στη γωνία!	Γωνίες	139
58. Συνάντηση κορυφής!	Σχεδιάζω γωνίες	141
59. Έχω μεγάλα σχέδια!	Μεγεθύνω – μικραίνω σχήματα	143
60. Αντανακλάσεις	Αξονική συμμετρία	145
61. Καλύπτω, βάφω, σκεπάζω	Μετρώ επιφάνειες	147
62. Πλαγιάζω αλλά δεν αλλάζω!	Βρίσκω το εμβαδό παραλληλογράμμου	149
63. Αδυνάτισα! Μισός έμεινα!	Βρίσκω το εμβαδό τριγώνου	151
64. Το εμβαδό του τραπεζίου;;	Βρίσκω το εμβαδό τραπεζίου	153
65. Κόβω κύκλους!	Βρίσκω το εμβαδό κυκλικού δίσκου	155
66. Να το κάνω πακέτο;	Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: έδρες και αναπτύγματα	157
67. Συναρμολογώντας κομμάτια	Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: ακμές και κορυφές	159
68. Να το τυλίξω;	Κύλινδρος	161
69. Γέμισε; Χωράω κι εγώ;	Όγκος – Χωρητικότητα	163
70. Κύβοι και κιβώτια	Όγκος κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου	165
71. Τύπος συντηρητικός!	Όγκος κυλίνδρου	167
Σχημα..τίζω άποψη	*Ανακεφαλαίωση για τη θεματική ενότητα 6: Γεωμετρία*	169

Γεωμετρία

Σε αυτή τη θεματική αυτή ενότητα θα ασχοληθούμε με τη Γεωμετρία.

Η Γεωμετρία σε πρωτόγονη και εντελώς πρακτική μορφή φαίνεται πως προέκυψε στην αρχαία εποχή από την ανάγκη των ανθρώπων να οροθετήσουν την περιουσία τους.

Ο Ηρόδοτος, για παράδειγμα, (5ος αιώνας π.Χ.) αναφέρει πως στην αρχαία Αίγυπτο μετά τις ετήσιες πλημμύρες του Νείλου ο βασιλιάς έστελνε τους «μετρητές» οι οποίοι όριζαν ξανά τα σύνορα των χωραφιών των Αιγυπτίων αγροτών που είχαν χαθεί με τις πλημμύρες. Από την ανάγκη αυτή, κατά μια εκδοχή, ξεπήδησαν οι πρώτες πρακτικές γνώσεις της Γεωμετρίας.

Παρόμοιες γνώσεις φαίνεται πως είχαν και άλλοι αρχαίοι πολιτισμοί. Από αρχαίες πινακίδες των Χαλδαίων μαθαίνουμε γνώριζαν να ορίζουν όρια και να τα προσδιορίζουν στις αγοραπωλησίες οικοπέδων.

Όλες όμως αυτές οι γνώσεις φαίνεται πως είχαν πρακτικό χαρακτήρα και ήταν περισσότερο τέχνη παρά επιστήμη.

Η Γεωμετρία αναπτύχθηκε ως επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα. Οι πρώτοι Έλληνες σοφοί που ασχολήθηκαν με τα Μαθηματικά ήταν ο Θαλής ο Μιλήσιος (640-546 π.Χ.) και ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (580-490 π.Χ.). Ο Θαλής γνώριζε τη σφαιρικότητα της γης, προέβλεπε τις εκλείψεις και χώριζε το έτος σε 365 ημέρες. Ο Πυθαγόρας θεωρούσε σαν τελειότερο γεωμετρικό σχήμα τον κύκλο και τελειότερο στερεό τη σφαίρα.

Αργότερα, άλλοι μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί όπως ο Πυθαγόρας, ο Ευκλείδης και ο Δημόκριτος μελέτησαν τα σχήματα με τις ιδιότητές τους και σταδιακά διαμόρφωσαν την επιστήμη της Γεωμετρίας με τη μορφή που τη γνωρίζουμε σήμερα.

Κεφάλαιο 56ο

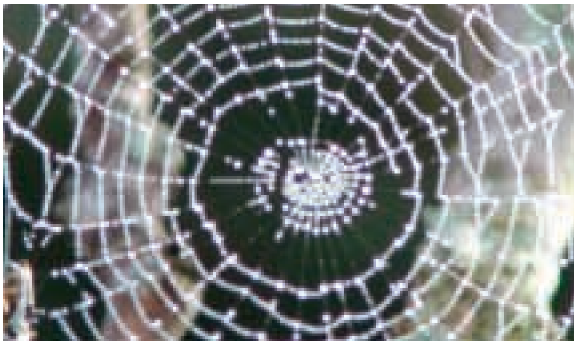
Γεωμετρικά σχήματα - Πολύγωνα

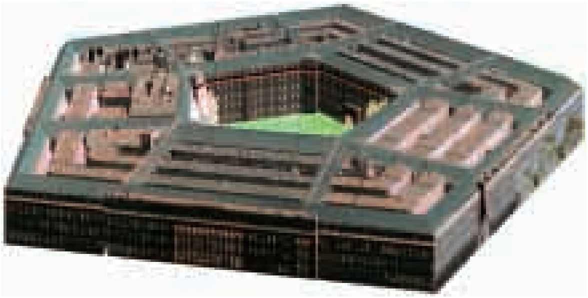
Τα σχήματα του κόσμου!

Αναγνωρίζω γεωμετρικά σχήματα.
Χαράζω γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων.

Δραστηριότητα 1η

Ο κόσμος μας είναι γεμάτος σχήματα. Κάποια από αυτά είναι δημιουργήματα της φύσης και άλλα είναι δικές μας κατασκευές.





- Στην αριστερή εικόνα φαίνεται ένας ιστός. Να «πατήσεις» με χρωματιστό μολύβι τρία από τα σχήματα που διακρίνεις σε αυτόν και να γράψεις τι σχήματα είναι:

  ....

- Διακρίνεις κάποιο παραλληλόγραμμο ή κανονικό σχήμα;...
- Στη δεξιά εικόνα φαίνεται ένα σκίτσο από το «Πεντάγωνο», το κτήριο διοίκησης του Αμερικανικού Υπουργείου Άμυνας, ένα από τα μεγαλύτερα κτήρια στον κόσμο. Γιατί νομίζεις ότι ονομάστηκε έτσι;

  ....

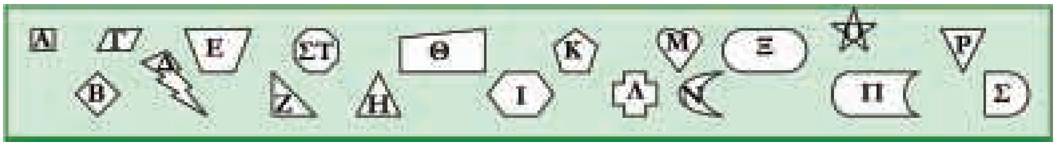
- Η περίμετρός του είναι 1,6 χμ. Μπορείς να βρεις το μήκος κάθε εξωτερικού τοίχου;

  ....

- Τι είναι αυτό που σε βοηθάει να το υπολογίσεις;...

Δραστηριότητα 2η

Ξεχώρισε όσα από τα παρακάτω σχήματα είναι πολύγωνα και ταξινόμησέ τα στον πίνακα που ακολουθεί.



Τρίγωνα	Τετράπλευρα	Πεντάγωνα	Εξάγωνα	Επτάγωνα	Οκτάγωνα	Δεκάγωνα

- Σε τι διαφέρουν τα σχήματα που ονομάζουμε πολύγωνα από τα άλλα;
- Είναι όλα τα πολύγωνα κανονικά; Πώς θα αναγνωρίσεις ένα κανονικό πολύγωνο;
- Να εργαστείς με την ομάδα σου: Σταθείτε όρθιοι κρατώντας ένα κλειστό κομμάτι σχοινί. Προσπαθήστε να φτιάξετε όσα πολύγωνα μπορείτε. Γράψε ποια φτιάξατε:

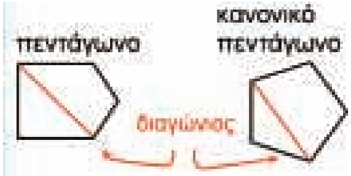
  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι στο περιβάλλον μας μπορούμε να διακρίνουμε διάφορα σχήματα και να τα ταξινομήσουμε σύμφωνα με τις ιδιότητές τους.

Γεωμετρικά σχήματα

Τα κλειστά σχήματα που έχουν τουλάχιστον 3 πλευρές και 3 γωνίες λέγονται πολύγωνα. Τα πολύγωνα που έχουν όλες τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες μεταξύ τους λέγονται **κανονικά πολύγωνα.** Στα πολύγωνα το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κορυφές, όταν δεν είναι πλευρά, λέγεται **διαγώνιος.**

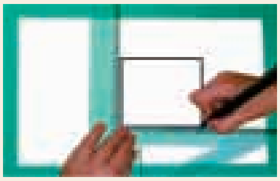
Παραδείγματα

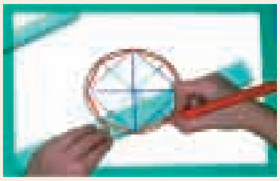


Τα ονόματα των πολυγώνων, εκτός από το τετράπλευρο, σχηματίζονται από τον αριθμό των γωνιών που έχουν και την κατάληξη **-γωνο**.

Εφαρμογή ***Σχεδιάζω πολύγωνα***

Σχεδίασε με όργανα (κανόνα, γνώμονα, διαβήτη) διάφορα πολύγωνα σε χρωματιστά χαρτιά, κόψε και κόλλησε τα, ώστε να δημιουργήσεις ένα σχέδιο.





Λύση - Απάντηση:

Για να σχεδιάσω ένα τετράγωνο σχεδιάζω δύο παράλληλες γραμμές και μετά τραβώ ανάμεσα μια κάθετη σε αυτές. Προσέχω όλες οι πλευρές να είναι ίσες. Με παρόμοιο τρόπο, αλλά με τις απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες ανά δύο, σχεδιάζω ένα ορθογώνιο ή πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Για να σχεδιάσω κανονικό εξάγωνο σχεδιάζω πρώτα έναν κύκλο στον οποίο σημειώνω τμήματα ίσα με την ακτίνα του. Μετά ενώνω το κάθε σημείο με το διπλανό του.

Για ένα οκτάγωνο, τραβώ δύο κάθετες διαγώνιες στον κύκλο, ενώνω τις άκρες τους και έτσι έχω ένα τετράγωνο. Συνεχίζω βρίσκοντας τη μέση των πλευρών του και τραβώ άλλες δύο κάθετες διαγώνιους που να περνούν από τα σημεία αυτά. Ενώνω όλα τα σημεία και έτσι έχω ένα κανονικό οκτάγωνο.

Μπορείς να κάνεις αυτά ή άλλα σχήματα και με άλλους τρόπους!

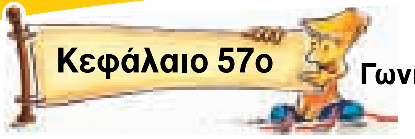
Σημείωση: *Προσπάθησε να κάνεις ένα παρόμοιο σχέδιο στον υπολογιστή.*

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **πολύγωνο, κανονικό πολύγωνο** και **διαγώνιος**. Να αναφέρεις σχήματα που συναντάς στο περιβάλλον.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Σε ένα εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ μπορώ να τραβήξω από μια κορυφή 6 διαγώνιες.	❒	❒
Σε ένα τρίγωνο δεν μπορώ να τραβήξω καμία διαγώνιο.	❒	❒
Για να σχεδιάσω ένα πολύγωνο με όργανα, πρέπει να ξέρω τις ιδιότητές του.	❒	❒

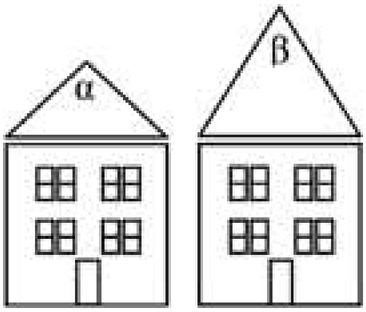


Κεφάλαιο 57ο **Γωνίες**

Μεγάλη α...γωνία στη γωνία!

Συγκρίνω γωνίες.
Μετρώ γωνίες.

Δραστηριότητα 1η



Τα διπλανά σχέδια είναι για δύο ίδια σπίτια που θα χτιστούν σε διαφορετικές περιοχές. Η μόνη τους διαφορά είναι στις στέγες μια και διέφερε το μέγιστο ύψος δόμησης που επιτρεπόταν στις δύο περιοχές.

- Ποια από τις δύο γωνίες (α, β) νομίζεις ότι είναι μεγαλύτερη; ......
- Αποτύπωσε τις γωνίες α και β σε διαφανή χαρτιά και βάλε τη μία πάνω στην άλλη για να τις συγκρίνεις. Ποιο τμήμα των γωνιών πρέπει να συμπέσει για να κάνεις τη σύγκριση;

  ....

- Ποια είναι η μεγαλύτερη; ....
- Με ποιους άλλους τρόπους μπορούμε να τις συγκρίνουμε;...

  ....

- Το μέγεθος των γωνιών, δηλαδή το «άνοιγμά» τους, εξαρτάται από το μήκος των πλευρών τους;

  ....

Δραστηριότητα 2η

Οι ζωγράφοι και οι γλύπτες είναι καλλιτέχνες που χρειάζεται να υπολογίζουν τις γωνίες με ακρίβεια για να κατασκευάσουν αγάλματα ή ζωγραφικά αντίγραφα.

Ένας καλλιτέχνης ζωγραφίζει τον πύργο της Πίζας στην Ιταλία.

- Είναι η γωνία που σχηματίζει ο Πύργος με το έδαφος ορθή, οξεία ή αμβλεία;

  ....

- Με τι μπορείς να συγκρίνεις τη γωνία αυτή, ώστε να κάνεις τη διαπίστωσή σου;

  ....

- Αρκεί αυτή η διαπίστωση στο ζωγράφο ώστε να φτιάξει ένα πιστό ζωγραφικό αντίγραφο του Πύργου;

  ....

- Τι πιστεύεις ότι πρέπει να κάνει;...

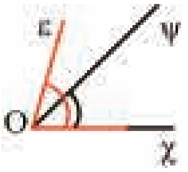
  ....

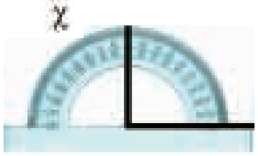
Οι παραπάνω δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε ότι το μέγεθος μιας γωνίας εξαρτάται από το άνοιγμα των πλευρών της και όχι από το μήκος τους.

Σύγκριση και μέτρηση γωνιών

Μπορούμε να συγκρίνουμε δύο γωνίες μεταξύ τους αν τοποθετήσουμε τη μία πάνω στην άλλη, με την κορυφή και τη μία πλευρά τους να συμπίπτουν.
Για να μετρήσουμε μία γωνία αρκεί να βάλουμε επάνω της το **μοιρογνωμόνιο.** Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η **μοίρα** (1°):
$1^o = 60'$ (πρώτα λεπτά), $1' = 60''$ (δεύτερα λεπτά).
Μία γωνία μπορεί να είναι οξεία (μικρότερη από 90°), ορθή (ίση με 90°) ή αμβλεία (μεγαλύτερη από 90°).

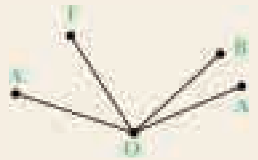
Παραδείγματα

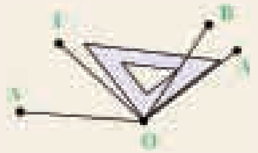




Εφαρμογή 1η **Συγκρίνω γωνίες**

Στο διπλανό σχήμα να συγκρίνεις τις γωνίες $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ μεταξύ τους και με την ορθή γωνία. Να γράψεις τι είδους γωνία είναι η καθεμία και να τις βάλεις με φθίνουσα σειρά.
Να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες.



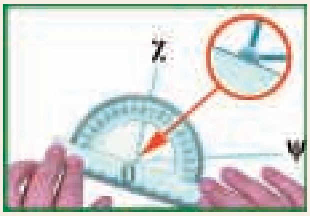


Λύση - Απάντηση:
Για να συγκρίνω τις γωνίες $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ μεταξύ τους δεν χρειάζεται να τις αποτυπώσω σε διαφανές χαρτί, καθώς με τον τρόπο που είναι σχεδιασμένες συμπίπτει η κορυφή (Ο) και η μία πλευρά τους (ΑΟ). Είναι φανερό ότι είναι $A\hat{O}\Delta > A\hat{O}\Gamma > A\hat{O}B$.
Για να τις συγκρίνω με την ορθή γωνία αρκεί να βάλω το γνώμονα να συμπέσει στην κορυφή και στην κοινή πλευρά τους. Έτσι διαπιστώνω ότι : η $A\hat{O}B$ είναι οξεία, ενώ οι $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι αμβλείες.

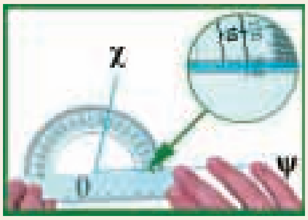
Εφαρμογή 2η **Μετρώ γωνίες**

Χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο να βρεις πόσες μοίρες ακριβώς είναι η γωνία $\chi\hat{O}\psi$.
Λύση

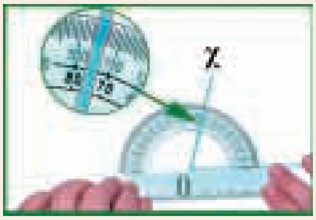
1ο βήμα: Βάζω σημάδι που έχει το μοιρογνωμόνιο στο κέντρο του, πάνω στην κορυφή της γωνίας.



2ο βήμα: Βάζω την ένδειξη 0° στη μια πλευρά της γωνίας. (Μπορεί να χρειαστεί να προεκτείνω τις πλευρές)



3ο βήμα: Διαβάζω την ένδειξη στην άλλη πλευρά της γωνίας. Προσοχή: Διαβάζω την κλίμακα στην οποία ανήκει το 0° που χρησιμοποίησα.



Απάντηση: Η γωνία $\chi\hat{O}\psi$ είναι 75°.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **οξεία γωνία, ορθή γωνία, αμβλεία γωνία** και **μοιρογνωμόνιο**. Να αναφέρεις παραδείγματα γωνιών από το περιβάλλον σου.

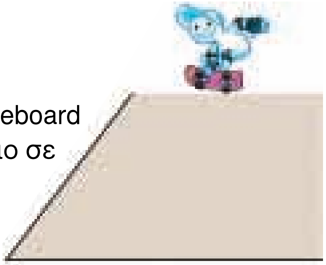
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
➾ *Το άνοιγμα των πλευρών μιας γωνίας 100ο είναι μεγαλύτερο από το άνοιγμα των κάθετων πλευρών του γνώμονα.*	❒	❒
➾ *Το μοιρογνωμόνιο είναι ένα όργανο που μετρά το μήκος των πλευρών της γωνίας.*	❒	❒

Κεφάλαιο 58ο Σχεδιάζω γωνίες

Συνάντηση κορυφής!

Σχεδιάζω γωνίες με τη βοήθεια του μοιρογνωμόνιου.
Προσθέτω ή αφαιρώ γωνίες.
Βρίσκω το άθροισμα των γωνιών τριγώνου και τετραπλεύρου.

Δραστηριότητα 1η

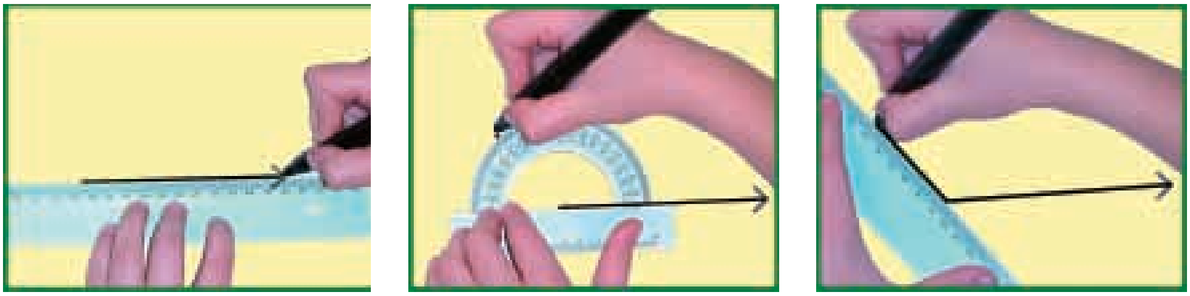


Ο Λευτέρης προσπαθεί να αποφασίσει αν είναι ασφαλές να κατεβεί με το skateboard αυτό το επικλινές επίπεδο. Γνωρίζει ότι είναι επικίνδυνο να κάνει κάτι τέτοιο σε κλίση μεγαλύτερη από 20°.

- Εσύ θα κατέβαινες από αυτό το επίπεδο; .... Γιατί; ....
- Μπορείς να υπολογίσεις το μέγεθος της γωνίας; ....

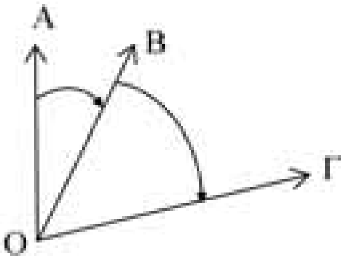
Το δημοτικό συμβούλιο αποφάσισε να κατασκευάσει ένα επικλινές επίπεδο με κλίση 20° για να παίζουν τα παιδιά με το skateboard με ασφάλεια.

- Πώς μπορείς να κατασκευάσεις μία γωνία που να δείχνει πώς θα είναι το επίπεδο αυτό; ....
- Με τη βοήθεια των παρακάτω εικόνων και όσα γνωρίζεις για τον τρόπο που χρησιμοποιείται το μοιρογνωμόνιο για τη μέτρηση των γωνιών γράψε τη διαδικασία της κατασκευής μιας γωνίας 130°.



....	....	....
....	....	....
....	....	....

Δραστηριότητα 2η



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο γωνίες, η $A\hat{O}B$ και η $B\hat{O}\Gamma$, που είναι δύο διαδοχικές στροφές στην πορεία ενός καραβιού.

- Εξήγησε με ποιον τρόπο ή με ποιους τρόπους μπορούμε να βρούμε το άθροισμά τους, για να βρούμε πόσες μοίρες συνολικά ήταν η στροφή από την αρχική πορεία:

  ....

- Μπορείς να σκεφτείς έναν τρόπο για να βρούμε τη διαφορά των δύο γωνιών;

  ....

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε γωνίες στο μέγεθος που θέλουμε και ακόμα ότι μπορούμε να βρίσκουμε το άθροισμα ή τη διαφορά γωνιών.

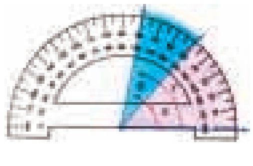
Κατασκευή γωνιών, άθροισμα και διαφορά γωνιών

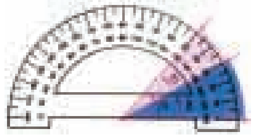
Μπορούμε να σχεδιάσουμε γωνίες στο μέγεθος που θέλουμε χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο και το χάρακα.

Βρίσκουμε το άθροισμα δύο ή περισσότερων γωνιών αν αθροίσουμε τα μεγέθη τους ή αν τις τοποθετήσουμε τη μία δίπλα στην άλλη και μετρήσουμε το συνολικό μέγεθος.

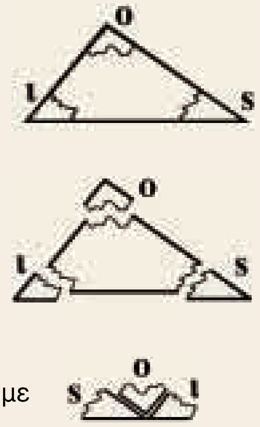
Βρίσκουμε τη διαφορά δύο γωνιών αν αφαιρέσουμε το μέγεθος της μιας από το μέγεθος της άλλης ή αν τις τοποθετήσουμε τη μία πάνω στην άλλη και μετρήσουμε τη διαφορά τους.

Παραδείγματα





Εφαρμογή 1η ***Άθροισμα γωνιών τριγώνου***



Να σχεδιάσεις ένα τρίγωνο και να υπολογίσεις το άθροισμα των γωνιών του. Να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες.

Λύση:

Σχεδιάζουμε ένα τυχαίο τρίγωνο.

Όπως μάθαμε, υπάρχουν δύο τρόποι για να μετρήσουμε τις γωνίες του. Ο ένας είναι να μετρήσουμε κάθε γωνία και να αθροίσουμε τα μεγέθη τους. Έτσι έχουμε: $\hat{o} = 65^o$, $\hat{\imath} = 60^o$, $\hat{s} = 55^o$. Άρα $65^o + 60^o + 55^o = 180^o$.

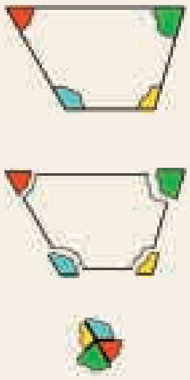
Ο άλλος τρόπος είναι να κόψουμε τις γωνίες του και να τις τοποθετήσουμε τη μία δίπλα στην άλλη, όπως φαίνεται στην εικόνα.

Τότε παρατηρούμε ότι όλες μαζί έχουν άθροισμα 180°.

Αν σχεδιάσουμε κι άλλα τρίγωνα και αθροίσουμε τις γωνίες τους, διαπιστώνουμε ότι όλα τα τρίγωνα έχουν άθροισμα γωνιών 180°.

Απάντηση: Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180°.

Εφαρμογή 2η ***Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρου***



Να κατασκευάσεις ένα τετράπλευρο και να υπολογίσεις το άθροισμα των γωνιών του. Να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες.

Λύση:

Σχεδιάζουμε ένα τυχαίο τετράπλευρο.

Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο όπως στο τρίγωνο. Μπορούμε και σ' αυτό το σχήμα να αθροίσουμε τις γωνίες του με δύο τρόπους. Διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι ίσο με 360°.

Αν σχεδιάσουμε κι άλλα τετράπλευρα και αθροίσουμε τις γωνίες τους, διαπιστώνουμε ότι όλα τα τετράπλευρα έχουν άθροισμα γωνιών 360°.

Απάντηση: Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι 360°.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε να **σχεδιάζουμε γωνίες** με μοιρογνωμόνιο και να βρίσκουμε το **άθροισμα** και τη **διαφορά** γωνιών. Να αναφέρεις δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με άθροισμα γωνιών 160º.	❐	❐
Το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τετραπλεύρου είναι 360º.	❐	❐
Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία γωνία είναι αμβλεία.	❐	❐

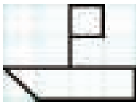
Κεφάλαιο 59ο

Μεγεθύνω – μικραίνω σχήματα

Έχω μεγάλα σχέδια!

Μεταφέρω σχήματα σε μιλιμετρέ χαρτί.
Μεγαλώνω και μικραίνω σχήματα.
Σχεδιάζω με κλίμακα.

Δραστηριότητα 1η



- Να σχεδιάσεις στην αριστερή μεριά του μιλιμετρέ χαρτιού το διπλανό καραβάκι, του οποίου η βάση είναι ένα τετράπλευρο και πάνω του έχει ένα τετράγωνο για σημαία.
- Να σχεδιάσεις στη δεξιά μεριά ένα καραβάκι με διπλάσιες ή τριπλάσιες διαστάσεις.

- Εξήγησε τον τρόπο που εργάστηκες για να διπλασιάσεις ή να τριπλασιάσεις το σχήμα: ....

....

- Οι γωνίες του δεύτερου σχήματος τι σχέση έχουν με τις γωνίες του πρώτου σχήματος;

....

Δραστηριότητα 2η

Δίπλα φαίνεται το σχέδιο μιας πισίνας κολυμβητηρίου. Ο αρχιτέκτονας που έφτιαξε το σχέδιο γνώριζε ότι οι πραγματικές διαστάσεις της πισίνας θα είναι οι εξής: μήκος 50 μ. και πλάτος 30 μ.

- Εξήγησε με ποιον τρόπο εργάστηκε ο αρχιτέκτονας για να μικρύνει τις πραγματικές διαστάσεις ώστε να φτιάξει το σχέδιό του :

....

- Όπως είναι το σχέδιο, μπορεί ο κατασκευαστής να βρει ποιες είναι οι πραγματικές διαστάσεις για να κατασκευάσει την πισίνα; ....

- Τι πρέπει να γράψει ο αρχιτέκτονας επάνω στο σχέδιο, ώστε να μπορεί ο καθένας να υπολογίσει τις πραγματικές διαστάσεις της πισίνας; ....

....

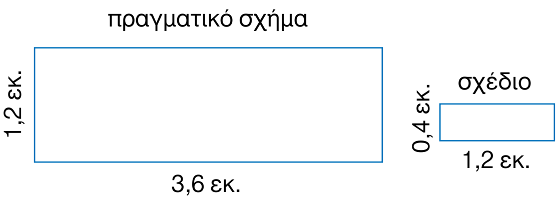
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, όταν μεταφέρουμε ένα σχήμα στο χαρτί, μπορούμε να διατηρήσουμε τις πραγματικές του διαστάσεις, μπορούμε όμως να το σχεδιάσουμε είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο απ' ότι είναι πραγματικά.

Μεγαλώνω ή μικραίνω σχήματα - Κλίμακα

Για να μεγεθύνουμε ή να μικρύνουμε ένα σχήμα πρέπει να κρατήσουμε την αναλογία, σύμφωνα με τη σχέση που θέλουμε να έχει το σχέδιό μας με το πραγματικό σχήμα.

Κλίμακα ονομάζουμε το λόγο, δηλαδή τη σχέση, της απόστασης δύο σημείων του σχεδίου προς την πραγματική απόσταση. Γράφουμε πάντα την κλίμακα πάνω στο σχέδιο, με μορφή διαίρεσης ή κλάσματος

Παραδείγματα



Κλίμακα 1:3

Εφαρμογή 1η

Στη χώρα των «Λιλιπούτειων» τα πάντα έχουν διαστάσεις 4 φορές μικρότερες σε σχέση με αυτά της δικής μας χώρας. Χρησιμοποιείστε το γραμματόσημο που φαίνεται στην εικόνα, για να σχεδιάσετε ένα αντίστοιχο γραμματόσημο της χώρας των «Λιλιπούτειων».

Λύση:

Οι διαστάσεις του γραμματόσημου είναι μήκος 3,6 εκ. και πλάτος 3,2 εκ. Για να βρω τις διαστάσεις του «λιλιπούτειου» γραμματόσημου, μπορώ να διαιρέσω με το 4 ή να σχηματίσω την αναλογία.

Διαιρώντας με το 4, βρίσκω ότι το μήκος θα γίνει 3,6 : 4 = 0,9 εκ. ενώ το πλάτος θα γίνει 3,2 : 4 = 0,8 εκ.

Αν θέλεις μπορείς να δοκιμάσεις εφαρμόζοντας και την αναλογία $= \frac{\text{λιλιπούτειο μέγεθος}}{\text{ανθρώπινο μέγεθος}} = \frac{1}{4}$.

Απάντηση: Το «λιλιπούτειο» γραμματόσημο θα έχει μήκος 0,9 εκ. και πλάτος 0,8 εκ.

Εφαρμογή 2η

Χρησιμοποιείστε την κλίμακα του σχεδίου, για να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις του υπνοδωματίου.

Λύση:

Μετράμε τις διαστάσεις στο σχέδιο: πλάτος 3 εκ. και μήκος 2 εκ.

Σύμφωνα με την κλίμακα, 1 εκατοστό στο σχέδιο αντιπροσωπεύει 100 εκατοστά στην πραγματικότητα. Άρα το πλάτος είναι 3 • 100 = 300 εκατοστά ενώ το μήκος είναι 2 • 100 = 200 εκατοστά.

Απάντηση: Οι πραγματικές διαστάσεις του υπνοδωματίου είναι: πλάτος 3 μέτρα και μήκος 2 μέτρα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε να **μεγαλώνουμε** και να **μικραίνουμε σχήματα** και να σχεδιάζουμε με **κλίμακα**. Να αναφέρεις παραδείγματα σχεδίων με κλίμακα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Για να σχεδιάσω κάτι με κλίμακα 1:1000, διαιρώ το πραγματικό μήκος δια 1.000.	❒	❒
Όταν ένα σχέδιο έχει τριπλάσιες διαστάσεις από τις πραγματικές, για να υπολογίσω τις πραγματικές πολλαπλασιάζω με το 3.	❒	❒

Κεφάλαιο 6ο

Αξονική συμμετρία

Αντανακλάσεις

Αναγνωρίζω σχήματα με άξονα συμμετρίας.
Βρίσκω τους άξονες συμμετρίας των σχημάτων.
Σχεδιάζω σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς άξονα.

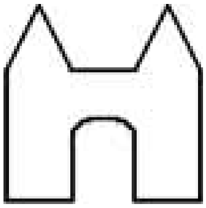
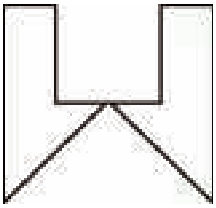
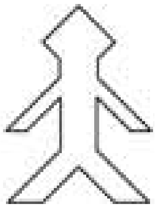
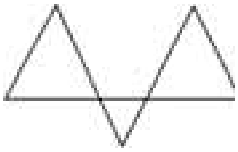
Δραστηριότητα 1η

Οι εικόνες που βλέπεις έχουν όλες ένα κοινό χαρακτηριστικό.

- Πώς ονομάζονται τα αντικείμενα ή τα σχέδια που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό; ....

....

- Αντίγραψε τα παρακάτω σχέδια σε μιλιμετρέ χαρτί και δίπλωσέ τα ώστε το ένα μέρος να τοποθετηθεί πάνω στο άλλο.

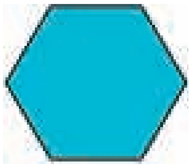
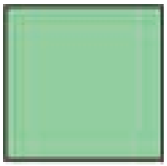
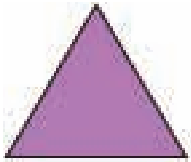
   

Τι παρατηρείς; ....

....

Δραστηριότητα 2η

- Αντίγραψε τα παρακάτω σχήματα σε διαφανές χαρτί και κόψε το περίγραμμά τους.

- Προσπάθησε να τα διπλώσεις στη μέση, έτσι που τα δύο μέρη τους να συμπίπτουν.
- Υπάρχει μόνο ένας τρόπος να τα διπλώσεις; ....
- Σχεδίασε στα παραπάνω σχήματα όλα τα ευθύγραμμα τμήματα (χρησιμοποιώντας διαφορετικό χρώμα για καθένα) που ορίζουν οι διπλώσεις που έκανες.

  Τι παρατηρείς; ....

  ....
- *Σκέψου σε πόσες ευθείες θα μπορούσες να διπλώσεις έναν κύκλο* ....
- *Θα μπορούσες να διπλώσεις με τον ίδιο τρόπο ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο;* ....

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι γύρω μας, τόσο στη φύση όσο και στις ανθρώπινες κατασκευές, υπάρχουν σχήματα ή αντικείμενα που «αποτελούνται» από δύο όμοια τμήματα.

Αξονική συμμετρία

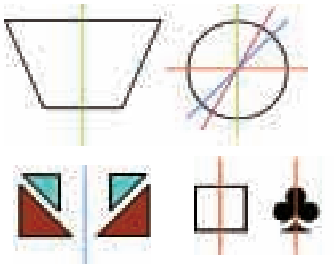
Όταν ένα σχήμα μπορεί να χωριστεί με μια ευθεία γραμμή σε δύο τμήματα, έτσι ώστε το ένα τμήμα να είναι η αντανάκλαση του άλλου, τότε το σχήμα αυτό είναι **συμμετρικό ως προς άξονα συμμετρίας.**

Η ευθεία γραμμή που χωρίζει το σχήμα αυτό στα δύο ονομάζεται **άξονας συμμετρίας.**

Ένα σχήμα μπορεί να έχει πολλούς άξονες συμμετρίας.

Κάποια συμμετρικά σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας που τα τέμνει, ενώ άλλα είναι συμμετρικά ως προς άξονα συμμετρίας που βρίσκεται έξω από αυτά.

Παραδείγματα

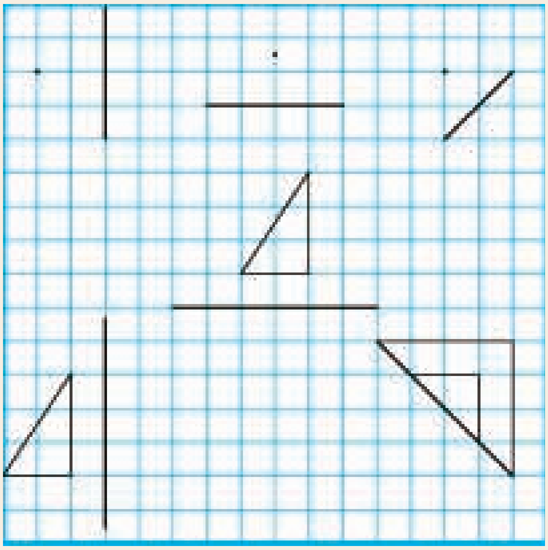


Εφαρμογή 1η **Βρίσκω τον άξονα συμμετρίας**

Στα παρακάτω σχήματα να χαράξεις με χρωματιστή γραμμή τον άξονα συμμετρίας.

Εφαρμογή 2η **Σχεδιάζω συμμετρικά σχήματα**

Στο παρακάτω μιλιμετρέ χαρτί να σχεδιάσεις τα συμμετρικά των σχημάτων ως προς τον άξονα συμμετρίας.

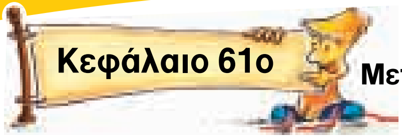


Λύση - Απάντηση: Αυτό που πρέπει να προσέξουμε στα συμμετρικά σχήματα είναι αν όλα τα σημεία του ενός μέρους είναι συμμετρικά με τα αντίστοιχα σημεία του άλλο (δηλαδή αν τραβώντας μια κάθετη γραμμή προς τον άξονα συμμετρίας απέχουν το ίδιο).

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **άξονας συμμετρίας** και **συμμετρικά σχήματα ως προς άξονα**. Να αναφέρεις παραδείγματα αντικειμένων ή σχημάτων συμμετρικών ως προς άξονα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Μόνο τα γεωμετρικά σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας.	❐	❐
Ο άξονας συμμετρίας πάντα τέμνει ένα σχήμα.	❐	❐
Τα δύο μέρη ενός συμμετρικού σχήματος είναι μεταξύ τους ίσα.	❐	❐



Κεφάλαιο 61ο

Μετρώ επιφάνειες

Καλύπτω, ράφω, σκεπάζω

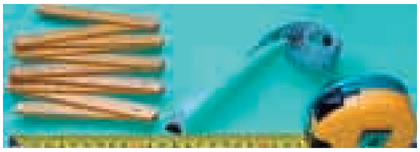
Κατανοώ τη μέτρηση της επιφάνειας, υπολογίζω το εμβαδό ορθογώνιου.
Γράφω και διαβάζω μετρήσεις επιφανειών με δεκαδικούς, συμμιγείς και κλασματικούς αριθμούς.
Λύνω προβλήματα σχετικά με μετρήσεις επιφανειών.

Δραστηριότητα 1η

Γνωρίζεις ότι η μονάδα μέτρησης της επιφάνειας είναι ένα τετράγωνο του οποίου κάθε πλευρά είναι ένα μέτρο και ονομάζεται τετραγωνικό μέτρο.
Υποδιαιρέσεις του είναι το τετραγωνικό χιλιοστό, το τετραγωνικό εκατοστό και το τετραγωνικό δεκατόμετρο.

- Σχεδίασε σε χαρτόνι ένα τετραγωνικό εκατοστό (δηλαδή ένα τετράγωνο του οποίου κάθε πλευρά είναι ίση με ένα εκατοστό) και κόψε το περίγραμμά του.
- Σχεδίασε τώρα ένα τετραγωνικό δεκατόμετρο και κόψε κι αυτό.

  Για να μετρήσουμε το μήκος χρησιμοποιούμε ένα εργαλείο (π.χ. ένα μέτρο, μια μετροταινία ή μια μεζούρα).



- Για να μετρήσεις το μήκος του θρανίου σου τι χρησιμοποιείς;

  ....

- Είναι εύκολο να μετρήσεις την επιφάνειά του χρησιμοποιώντας το τετραγωνικό εκατοστό ή το τετραγωνικό δεκατόμετρο που έχεις;

  ....

- Υπάρχει άλλος τρόπος για να υπολογίσεις την επιφάνεια του θρανίου σου;

  Εξήγησε: ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

- Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. Για κάθε αντικείμενο διάλεξε την κατάλληλη υποδιαίρεση του τετραγωνικού μέτρου. Πρώτα κάνε μια εκτίμηση κάθε επιφάνειας με το νου και μετά υπολόγισε την ακριβώς μετρώντας τις διαστάσεις.

Αντικείμενο	Μονάδα μέτρησης (τ.εκ., τ.δεκ., τ.μ.)	Εκτίμηση με το νου	Υπολογισμός με μέτρηση
Η σελίδα του βιβλίου			
Η επιφάνεια του θρανίου			
Ο πίνακας της τάξης			
Το πάτωμα της τάξης			

- Αν θέλεις να συγκρίνεις τους αριθμούς που εκφράζουν εμβαδό ή να κάνεις πράξεις ανάμεσά τους τι θα πρέπει να προσέξεις;...

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, για να μετρήσουμε την επιφάνεια ενός ορθογώνιου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα εργαλείο μέτρησης. Ωστόσο είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το εμβαδό πολλαπλασιάζοντας το μήκος επί το πλάτος του.

Μέτρηση επιφάνειας - εμβαδό

Εμβαδό μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ο αριθμός που εκφράζει το αποτέλεσμα της μέτρησής της.
Μονάδα μέτρησης επιφανειών είναι το **τετραγωνικό μέτρο** (τ.μ.).
Υποδιαιρέσεις του τ.μ. είναι: το τετραγωνικό δεκατόμετρο (τ.δεκ.), το τετραγωνικό εκατοστόμετρο (τ.εκ.) και το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (τ.χιλ.) (1 τ.μ. = 100 τ.δεκ. = 10.000 τ.εκ. = 1.000.000 τ.χιλ.). Πολλαπλάσιο του τ.μ. είναι το τετραγωνικό χιλιόμετρο (τ.χμ.) (1 τ.χμ. = 1.000.000 τ.μ.)

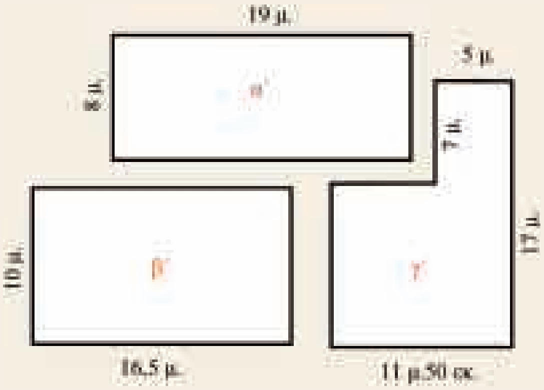
Παραδείγματα

Για να εκφράσουμε το εμβαδό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συμμιγή, δεκαδικό, φυσικό, μεικτό ή κλασματικό αριθμό. Για να κάνουμε όμως πράξεις ανάμεσα στις μετρήσεις πρέπει αυτές να εκφράζονται με την ίδια μορφή αριθμού και στην ίδια υποδιαίρεση.

14 τ.μ. 5.000 τ.εκ.
14,5 τ.μ.
145.000 τ.εκ.
$14\ ^{5000}/_{10000}$ ή $14\ ^{5}/_{10}$ τ.μ.

Εφαρμογή

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τρία γειτονικά οικόπεδα που πουλιούνται. Να βρείτε ποιο είναι το μεγαλύτερο και πόσο θα πουληθεί, αν το τετραγωνικό μέτρο στοιχίζει 250 €.



Λύση:
Για να βρούμε ποιο είναι το πιο μεγάλο από τα τρία οικόπεδα, πρέπει να βρούμε την επιφάνεια που καλύπτει το καθένα απ' αυτά.

α΄ οικόπεδο: 19 • 8 = ... τ.μ.

β΄ οικόπεδο: 10 • 16,5 = ... τ.μ.

Για το γ΄ οικόπεδο μπορούμε να τραβήξουμε μια νοητή γραμμή που θα το χωρίζει σε δύο ορθογώνια, να υπολογίσουμε την επιφάνεια του καθενός και να προσθέσουμε τα δύο. Επομένως θα έχουμε
5 • .... = ... τ.μ. και .... • (17 - 7) = ... • 10 = ... τ.μ.

Άρα γ΄ οικόπεδο: .... + ... = ... τ.μ.
Απάντηση: Το πιο μεγάλο είναι το .....΄ οικόπεδο.
Θα στοιχίσει .... • 250 = ... €
Να συμπληρώσεις τώρα τον πίνακα :

	περίμετρος	εμβαδό
α΄ οικόπεδο		
β΄ οικόπεδο		
γ΄ οικόπεδο		

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **μέτρηση επιφάνειας, εμβαδό** και **τετραγωνικό μέτρο** με τις υποδιαιρέσεις και το πολλαπλάσιό του. Να εκφράσεις μια μέτρηση επιφάνειας με διαφορετικής μορφής αριθμούς.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Το εμβαδό ενός ορθογωνίου εξαρτάται από την περίμετρό του.	❐	❐
Το εμβαδό ενός ορθογωνίου εξαρτάται από το μήκος και το πλάτος του.	❐	❐
20 τ.μ. = 2.000 τ.δεκ. = 200.000 τ.εκ.	❐	❐

Κεφάλαιο 62ο

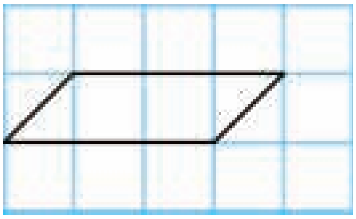
Βρίσκω το εμβαδό παραλληλογράμμου

Πλαγιάζω, αλλά δεν αλλάζω!

Διαπιστώνω ότι διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν το ίδιο εμβαδό.
Υπολογίζω εμβαδό οποιουδήποτε παραλληλογράμμου με τη βοήθεια τύπου.
Λύνω προβλήματα υπολογισμού εμβαδού παραλληλογράμμου.

Δραστηριότητα 1η

Η Ιφιγένεια σχεδίασε αυτό το παραλληλόγραμμο σε μιλιμετρέ χαρτί. Κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 εκατοστόμετρο. Η ίδια λέει ότι το παραλληλόγραμμο έχει εμβαδό 3 τ.εκ.

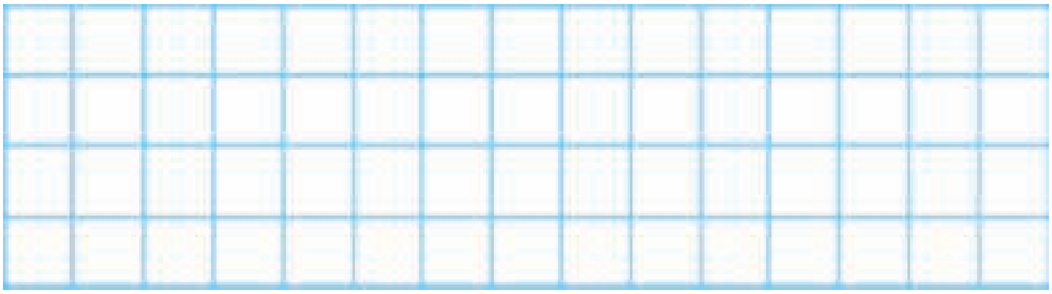


- Έχει δίκιο; ....
- Εξήγησε γιατί:..

....

Δραστηριότητα 2η

- Σχεδίασε παρακάτω ένα παραλληλόγραμμο που να μην είναι ορθογώνιο. Χρησιμοποίησε διαφορετικό χρώμα για κάθε ζευγάρι παράλληλων πλευρών.



- Μέσα στο παραλληλόγραμμο σχεδίασε μία γραμμή κάθετη στο ένα ζευγάρι από παράλληλες πλευρές. Οι δύο αυτές παράλληλες γραμμές τώρα ονομάζονται βάσεις του παραλληλογράμμου αυτού.
- Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα πώς ονομάζεται;..
- Μετάφερε το σχήμα σου σε ένα άλλο μιλιμετρέ χαρτί και κόψε το περίγραμμά του.
- Μετά κόψε το παραλληλόγραμμο σε δύο κομμάτια κατά μήκος της κάθετης γραμμής που σχεδίασες.
- Σχημάτισε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τα δύο αυτά κομμάτια και σημείωσε το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό του.
- Τι σχέση έχουν το μήκος και το πλάτος του ορθογώνιου που σχηματίστηκε με τη βάση και το ύψος του αρχικού παραλληλογράμμου;
- ....
- Ποιο είναι το εμβαδό του αρχικού σου παραλληλογράμμου; ....
- Εξήγησε πώς μπορείς να βρεις το εμβαδό ενός πλάγιου παραλληλογράμμου, χωρίς να το κόψεις:

....

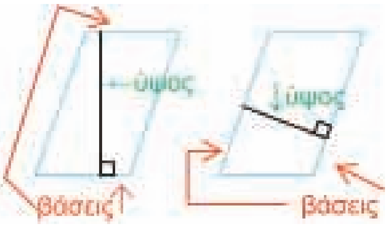
Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με βάση **β** και ύψος **υ** έχει την ίδια επιφάνεια με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις ίσες με **β** και **υ**.

Εμβαδό παραλληλογράμμου

Το **εμβαδό** ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο
$E_{(\text{παραλληλογράμμου})} = β \cdot υ$

Για να βρούμε το ύψος του παραλληλογράμμου, πρέπει να τραβήξουμε ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα προς ένα από τα ζευγάρια των παράλληλων πλευρών του. Αυτές οι πλευρές τότε λέγονται βάσεις του και το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, ύψος.

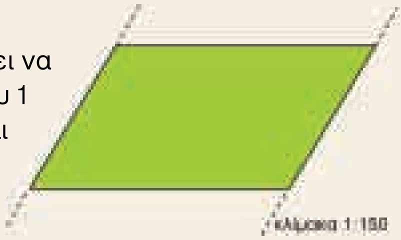
Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η

Στη διαπίστωση ότι ένα σχήμα μπορεί να χωριστεί σε κομμάτια και αυτά να τοποθετηθούν με διαφορετική διάταξη δημιουργώντας νέα σχήματα που θα έχουν το ίδιο εμβαδό με το αρχικό σχήμα στηρίζεται το αρχαίο κινεζικό παιχνίδι **TAN GRAM**. Αντίγραψέ το σε ένα χαρτόνι, κόψε κατά μήκος της διαγώνιας γραμμής και δημιούργησε το πρώτο νέο σχήμα: ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με επιφάνεια ίση με του αρχικού σχήματος!

Εφαρμογή 2η



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το κομμάτι ενός πάρκου που πρέπει να στρωθεί με έτοιμο χλοοτάπητα, ο οποίος πουλιέται σε κομμάτια του 1 τ.μ. και στοιχίζει 20 € το κομμάτι. Πόσα κομμάτια θα χρειαστούν και πόσο θα στοιχίσει;

Λύση:

Για να βρούμε το εμβαδό του κομματιού αυτού:

1. Φέρνουμε πρώτα το ύψος του.
2. Μετράμε πόσα εκατοστά είναι στο σχέδιο η βάση και το ύψος και υπολογίζουμε σύμφωνα με την κλίμακα τις πραγματικές τους διαστάσεις.

   βάση .... ύψος ....

3. Εφαρμόζουμε τον τύπο που μας δίνει το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

   ....

Το εμβαδό του κομματιού δείχνει και τον αριθμό των κομματιών χλοοτάπητα, αφού το μετράμε σε τετραγωνικά μέτρα και κάθε κομμάτι χλοοτάπητα είναι 1 τετραγωνικό μέτρο.

Για να βρούμε πόσο θα στοιχίσει ο χλοοτάπητας θα πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό τον κομματιών με το 20, γιατί 20 € είναι η τιμή κάθε κομματιού χλοοτάπητα. ....

Απάντηση: Θα χρειαστούν .... κομμάτια χλοοτάπητα και θα στοιχίσει .... €.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εμβαδό παραλληλογράμμου, βάση** και **ύψος**. Να σχεδιάσεις ένα παραλληλόγραμμο και να βρεις όλα τα ύψη και τις αντίστοιχες βάσεις του.

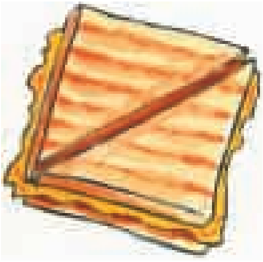
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Σε ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο βάση ορίζεται η κάθετη πλευρά στο ύψος.	❐	❐
Για να βρω το εμβαδό ενός πλάγιου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζω τη μια πλευρά με την άλλη.	❐	❐

Κεφάλαιο 63ο Βρίσκω το εμβαδό τριγώνου

Αδυνάτισα! Μισός έμεινα!

Κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού του τριγώνου.
Υπολογίζω εμβαδό τριγώνου με τη βοήθεια τύπου.
Λύνω προβλήματα εμβαδών τριγώνου.



Δραστηριότητα 1η

Ένα τοστ έχει σχήμα ορθογώνιου. Πολλές τοστιέρες όταν ψήνουν το τοστ το χωρίζουν στα δύο, όπως δείχνει το σκίτσο.

- Ποια είναι η σχέση του καθενός από τα δύο κομμάτια με το αρχικό τοστ;

  ....

- Πως θα έβρισκες την έκταση της επιφάνειας (το εμβαδό) του αρχικού τοστ;

  ....

- Πόσο από αυτό το εμβαδό αντιστοιχεί σε καθένα από τα δύο τριγωνικά κομμάτια στα οποία μοιράστηκε το αρχικό τοστ; ....

Δραστηριότητα 2η

- Σχεδίασε δίπλα ένα τρίγωνο.
- Ξεκίνα από οποιαδήποτε κορυφή και φέρε την κάθετη προς την απέναντι πλευρά.

Η πλευρά αυτή λέγεται τώρα **βάση** ενώ η κάθετη που έφερες ονομάζεται **ύψος** του τριγώνου.

- Χρωμάτισε τη βάση με ένα χρώμα.
- Μέτρησε το ύψος και τη βάση του τριγώνου και κατάγραψε τις μετρήσεις σου.

  ....

- Αντίγραψε το τρίγωνο δύο φορές σε ένα άλλο χαρτί και κόψε αυτά τα δύο τρίγωνα.
- Τακτοποίησε τα τρίγωνα που έκοψες με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργηθεί ένα παραλληλόγραμμο.
- Βρες το ύψος και τη βάση του παραλληλογράμμου και υπολόγισε το εμβαδό του.

  ....

- Τι σχέση έχει το εμβαδό του παραλληλογράμμου με το εμβαδό του ενός τριγώνου;

  ....

- Ποιο είναι το εμβαδό του τριγώνου; ....
- Τι σχέση έχουν η βάση και το ύψος του παραλληλογράμμου που σχηματίστηκε με τη βάση και το ύψος του αρχικού τριγώνου; ....
- Προσπάθησε να εκφράσεις ένα γενικό κανόνα για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου:

  ....

- Δοκίμασε να εφαρμόσεις τον κανόνα φέρνοντας κάποιο άλλο ύψος στο τρίγωνο.

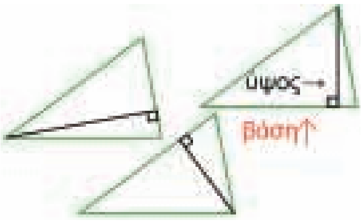
Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ένα τρίγωνο με βάση **β** και ύψος **υ** έχει τη μισή επιφάνεια από ένα παραλληλόγραμμο με διαστάσεις ίσες με **β** και **υ**.

Εμβαδό τριγώνου

Το **εμβαδό** ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινόμενου της βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $E_{(τριγώνου)} = (β \cdot υ) : 2$

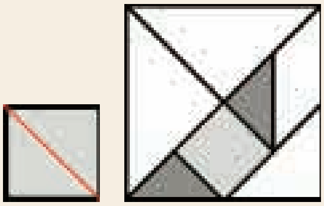
Για να βρούμε το ύψος του τριγώνου, πρέπει να τραβήξουμε μια κάθετη γραμμή από μία από τις κορυφές του προς την απέναντι πλευρά. Αυτή η πλευρά του τότε λέγεται βάση του.

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η

Στο **TAN GRAM** που κατασκεύασες στο προηγούμενο μάθημα, αφού κόψεις όλα τα κομμάτια, βρες ποια είναι η σχέση που έχει το εμβαδό των δύο μικρών τριγώνων με το μικρό τετράγωνο.



Λύση - Απάντηση:
Βάζουμε τα τρίγωνα το ένα δίπλα στο άλλο επάνω στο τετράγωνο.
Παρατηρούμε ότι το καλύπτουν ακριβώς. Άρα, το εμβαδό κάθε τριγώνου είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του αρχικού τετραγώνου.

Εφαρμογή 2η

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το παρτέρι στη νησίδα ανάμεσα σε δύο δρόμους στη Θεσσαλονίκη. Κάθε άνοιξη ο Δήμος αλλάζει τα λουλούδια στα παρτέρια του και χρειάζεται να υπολογίζει τις επιφάνειες των παρτεριών.
Αν αυτή η εργασία κοστίζει κατά μέσο όρο 3 € το τετραγωνικό μέτρο, πόσο κοστίζει η αλλαγή των λουλουδιών σ' αυτή τη νησίδα;

Λύση:
Πρέπει πρώτα να βρούμε το εμβαδό του κομματιού αυτού:

1. Φέρνουμε το ύψος του.
2. Μετράμε πόσα εκατοστά είναι στο σχέδιο η βάση και το ύψος και υπολογίζουμε σύμφωνα με την κλίμακα τις πραγματικές τους διαστάσεις.

   βάση .... ύψος ....

3. Εφαρμόζουμε τον τύπο που μας δίνει το εμβαδό του τριγώνου.

   ....

   Για να βρούμε πόσο θα στοιχίσει η αλλαγή των λουλουδιών θα πολλαπλασιάσουμε τα τετραγωνικά μέτρα με το 3, γιατί 3 € είναι το κόστος κάθε τετραγωνικού μέτρου.

....

Απάντηση: Η αλλαγή των λουλουδιών στη νησίδα αυτή κοστίζει .... €.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εμβαδό τριγώνου, βάση** και **ύψος τριγώνου**. Εξήγησε τους όρους αυτούς σε ένα τρίγωνο που θα σχεδιάσεις εσύ.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
➻ *Σε όλα τα τρίγωνα μπορώ να φέρω τρία ύψη.*	❐	❐
➻ *Υπάρχει περίπτωση το ένα ύψος να βρίσκεται έξω από το τρίγωνο.*	❐	❐

Κεφάλαιο 64ο

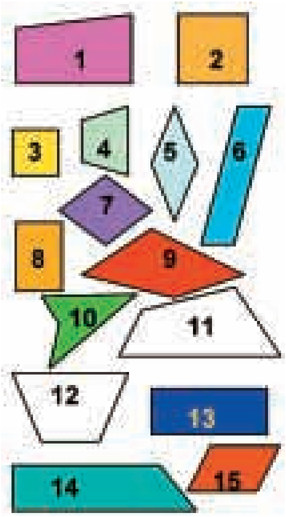
Βρίσκω το εμβαδό τραπεζίου

Το εμβαδό του τραπεζίου;;

Αναγνωρίζω το τραπέζιο και κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού του.
Βρίσκω το εμβαδό του τραπεζίου με τη βοήθεια τύπου.
Λύνω προβλήματα εμβαδών τραπεζίου και άλλων πολυγώνων.

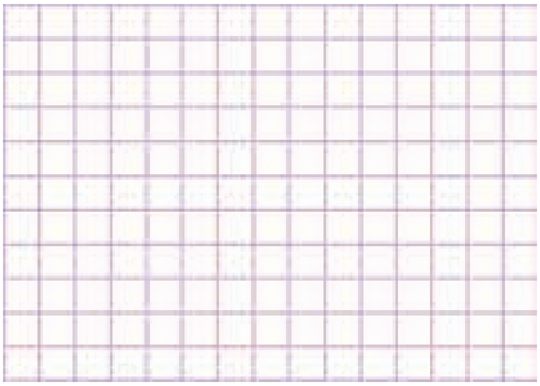
Δραστηριότητα 1η

- Πώς ονομάζονται τα σχήματα που έχουν τέσσερις πλευρές; ....
- Όλα τα σχήματα που φαίνονται δίπλα έχουν τέσσερις πλευρές.
  Ταξινόμησέ τα σύμφωνα με κάποιο άλλο χαρακτηριστικό τους και συμπλήρωσε τον ακόλουθο πίνακα:



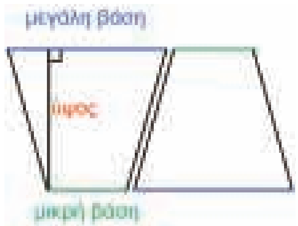
Ονομασία	Ειδικό χαρακτηριστικό	Σχήματα
Τετράγωνο	....	2, 3
Ορθογώνιο	....	
Ρόμβος	....	
Παραλληλόγραμμο	....	
Τραπέζιο	....	
Άλλο τετράπλευρο	Τέσσερις πλευρές..................	9, ...

Δραστηριότητα 2η



- Σχεδίασε δίπλα, ένα τραπέζιο.
- Κάνε μια εκτίμηση με το νου για το εμβαδό του: ....
- Αντίγραψε το τραπέζιο σε ένα άλλο χαρτί δύο φορές και κόψε τα δύο αυτά σχήματα.
- Βάλε τα δύο τραπέζια με τέτοιο τρόπο, ώστε να σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο.
- Βρες το εμβαδό του παραλληλογράμμου εφαρμόζοντας τον τύπο.
- Μπορείς τώρα να πεις πόσο είναι το εμβαδό του αρχικού σου τραπεζίου; ....
  ....

- Το σχήμα που έφτιαξες μοιάζει με το διπλανό σχήμα. Με τη βοήθειά του προσπάθησε να εξηγήσεις τη σχέση που έχει η βάση του παραλληλογράμμου, με τις βάσεις του τραπεζίου: ....
  ....
  ....



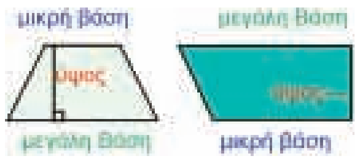
Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, δύο ίδια τραπέζια είναι δυνατό να τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο έτσι ώστε να σχηματίσουν ένα παραλληλόγραμμο που θα έχει βάση το άθροισμα των βάσεων του τραπεζίου και ύψος το ύψος του τραπεζίου.

Εμβαδό τραπεζίου

Το **εμβαδό** ενός τραπεζίου είναι ίσο με το άθροισμα μικρής και μεγάλης βάσης του επί το ύψος του δια δύο.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $\mathbf{E_{(τραπεζίου)} = (β + B) \cdot υ : 2}$

Βάσεις του τραπεζίου είναι οι δύο παράλληλες πλευρές του και ύψος του το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσά τους.

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η «κάτοψη» ενός συνεταιριστικού ελαιοτριβείου. Τα μέλη του συνεταιρισμού χρειάζονται ένα δάνειο για επέκταση των εγκαταστάσεων. Πρέπει να δηλώσουν το εμβαδό του εργοστασίου. Πόσο είναι;

Λύση:

Μελετώντας την κάτοψη, διαπιστώνουμε ότι το σχήμα του κτηρίου είναι τραπέζιο.
Οι βάσεις του είναι οι δύο παράλληλες πλευρές του και το ύψος του είναι η κάθετη πλευρά στις δύο βάσεις.
Υπολογίζουμε, σύμφωνα με την κλίμακα του σχεδίου, τις πραγματικές διαστάσεις των πλευρών που μας χρειάζονται και εφαρμόζουμε τον τύπο που μας δίνει το εμβαδό του τραπεζίου.
Βρες τα μήκη των βάσεων και του ύψους :

Βάση μεγάλη:..
βάση μικρή: ....
Ύψος: ....
Εμβαδό:..

Απάντηση: Το εμβαδό του κτηρίου είναι ……..……. τ.μ.

Εφαρμογή 2η

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάτοψη του εργοστασίου μετά την επέκταση που πραγματοποιήθηκε στο κτήριο. Πόσο είναι τώρα το εμβαδό του κτηρίου;

Λύση:

Για να βρούμε το εμβαδό ενός σχήματος, μπορούμε να το χωρίσουμε σε πολύγωνα των οποίων ξέρουμε να υπολογίζουμε το εμβαδό. Το σχήμα του εργοστασίου όπως έγινε μετά την επέκταση μπορεί να χωριστεί σε ένα τραπέζιο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
Το εμβαδό του τραπεζίου το έχουμε ήδη βρει, άρα τώρα θα βρούμε μόνο το εμβαδό του παραλληλογράμμου και θα προσθέσουμε τα δύο εμβαδά.

βάση: ……………………….., ύψος: ……………………….., εμβαδό: ………………………..

Συνολικό εμβαδό κτηρίου: εμβαδό τραπεζίου + εμβαδό παραλληλογράμμου = ……………

Απάντηση: Το εμβαδό του κτηρίου τώρα είναι ……..……. τ.μ.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εμβαδό τραπεζίου, μικρή βάση, μεγάλη βάση** και **ύψος τραπεζίου**. Εξήγησε τους όρους αυτούς σε ένα τραπέζιο που θα σχεδιάσεις εσύ.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Στο τραπέζιο μπορώ να φέρω ύψος σε οποιαδήποτε από τις 4 πλευρές.	❒	❒
Για να βρω το εμβαδό ενός σχήματος μπορώ να το χωρίσω σε γνωστά σχήματα.	❒	❒

Κεφάλαιο 65ο

Βρίσκω το εμβαδό κυκλικού δίσκου

Κόβω κύκλους!

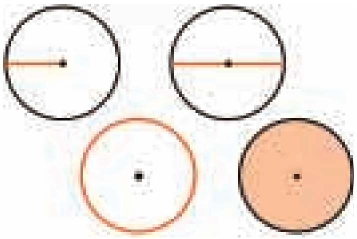
Κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού του κυκλικού δίσκου.
Βρίσκω το εμβαδό του κυκλικού δίσκου με τη βοήθεια τύπου.
Λύνω προβλήματα με εμβαδά κυκλικών σκων.

Δραστηριότητα 1η

Ο κύκλος είναι ένα από τα σχήματα που συναντάς καθημερινά στη ζωή σου.

- Ανάφερε κάποια κυκλικά αντικείμενα:..

....



Μπορούμε να κάνουμε τουλάχιστο 4 μετρήσεις που μας χρησιμεύουν στο να περιγράψουμε το μέγεθος ενός κύκλου. Συγκεκριμένα μπορούμε να μετρήσουμε την ακτίνα, τη διάμετρο, το μήκος του κύκλου και το εμβαδό.

- Ποιες από τις παραπάνω μετρήσεις γίνονται ευκολότερα;

....

Οι άνθρωποι που μελέτησαν τον κύκλο από τα αρχαία χρόνια ανακάλυψαν τη σχέση που έχει η διάμετρος του κύκλου με το μήκος του: μήκος κύκλου = 3,14 • διάμετρος. Μπορείς να βεβαιωθείς για τη σχέση αυτή μετρώντας διάφορους κύκλους.

Δραστηριότητα 2η

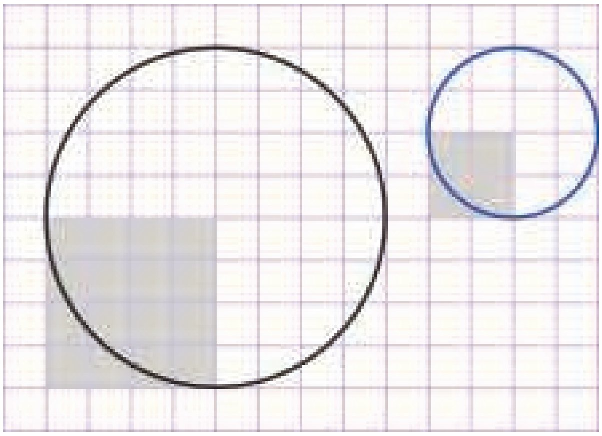
- Προσπάθησε να κάνεις μια εκτίμηση με όποιον τρόπο νομίζεις για το πιθανό εμβαδό του μεγαλύτερου από τους πιο κάτω κύκλους.
- Πιστεύεις ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο εμβαδό και την ακτίνα του κύκλου; ....
- Ο κύκλος με τη μισή ακτίνα θα έχει το μισό εμβαδό;

....

- Στο διπλανό σχήμα βλέπεις σκιασμένο ένα τετράγωνο. Θα το ονομάσουμε «τετράγωνο της ακτίνας». Γιατί; ....

....

- Κόψε μερικά τέτοια τετράγωνα και προσπάθησε να ανακαλύψεις πόσα χρειάζονται για να καλυφθεί η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου.
- Πόσα χρειάζονται; (Μπορείς να απαντήσεις πόσα περίπου, αν δεν μπορείς ακριβώς.)



....

- Επανέλαβε το ίδιο και για άλλους κύκλους, σημειώνοντας πάντα το αποτέλεσμα.
- Διακρίνεις κάτι που ισχύει και πάλι για τους κύκλους ανεξάρτητα από το μέγεθός τους;

....

- Μπορείς τώρα να πεις πώς μπορούμε να βρούμε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου χωρίς να κόβουμε τετράγωνα; ....

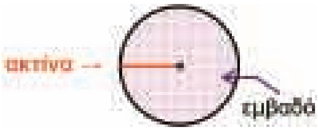
....

Από τα παραπάνω διαπιστώσαμε ότι το εμβαδό του κυκλικού δίσκου είναι περίπου 3 φορές το τετράγωνο της ακτίνας. Επίσης γνωρίζουμε ότι το μήκος του κύκλου είναι περίπου 3 φορές η διάμετρος. Αυτός ο αριθμός, ο «περίπου 3» ονομάζεται π και είναι στην πραγματικότητα ένας αριθμός με πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία, ωστόσο για ευκολία χρησιμοποιούμε μόνο τα δύο: λέμε $\pi = 3{,}14$.

Εμβαδό κυκλικού δίσκου

Το **εμβαδό** ενός κυκλικού δίσκου είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμού π επί το τετράγωνο της ακτίνας του.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $\mathbf{E_{(κυκλικού\ δίσκου)}} = \pi \cdot α^2$

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η

Μία εταιρία κινητής τηλεφωνίας έβαλε την κεραία της στο σημείο που φαίνεται στο χάρτη. Η κεραία έχει εμβέλεια (δηλαδή στέλνει σήμα) σε απόσταση 25 χιλιομέτρων. Σημείωσε πάνω στο χάρτη την περιοχή της εμβέλειας και υπολόγισε το εμβαδό της περιοχής αυτής.

Λύση

Αφού γνωρίζουμε ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται σε απόσταση μέχρι 25 χμ. βρίσκονται μέσα στην περιοχή εμβέλειας, για να οριοθετήσουμε την περιοχή αυτή, θα σχεδιάσουμε έναν κύκλο με κέντρο την κεραία και ακτίνα 25 χμ., αφού υπολογίσουμε πόση θα είναι η απόσταση αυτή πάνω στο χάρτη σύμφωνα με την κλίμακα. ..

....

Απάντηση: Το εμβαδό της περιοχής είναι :

Εφαρμογή 2η

Στον αρχαιολογικό χώρο της Βεργίνας βρέθηκε το αρχαίο θέατρο στο οποίο ο βασιλιάς της Μακεδονίας Φίλιππος ο Β΄ δολοφονήθηκε το 336 π.Χ. Το θέατρο διέθετε ημικυκλική ορχήστρα διαμέτρου 28 μέτρων. Να υπολογίσετε το εμβαδό της.

Λύση

Για να βρούμε το εμβαδό ενός ημικύκλιου, αρκεί να βρούμε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου με την ίδια ακτίνα και να το διαιρέσουμε δια 2. Αφού η διάμετρος είναι 28 μ., η ακτίνα είναι 28 : 2 = 14 μ.

Άρα το εμβαδό του κυκλικού δίσκου θα είναι: .... και του ημικύκλιου : ....

Απάντηση: Το εμβαδό της ορχήστρας του αρχαίου θεάτρου είναι .... τ.μ.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εμβαδό κυκλικού δίσκου** και π. Εξήγησε γιατί γνωρίζοντας μόνο την ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου μπορούμε να βρούμε το εμβαδό του.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Όταν γνωρίζω το εμβαδό ενός κυκλικού δίσκου, μπορώ να βρω την ακτίνα του.	❐	❐
Το εμβαδό ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα 3μ. είναι $3{,}14 \cdot 3^2 = 3{,}14 \cdot 6 = 18{,}84$ *τ.μ.*	❐	❐

Κεφάλαιο 66ο

Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: έδρες και αναπτύγματα

Να το κάνω πακέτο;

Σχεδιάζω αναπτύγματα και κατασκευάζω κύβους και ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.
Παρατηρώ και αναγνωρίζω ομοιότητες και διαφορές στην επιφάνεια του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.
Κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού των βάσεων, της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Δραστηριότητα 1η

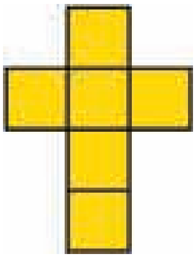
Ο κύβος είναι ένα γεωμετρικό στερεό σώμα με επίπεδες επιφάνειες που έχουν σχήμα τετραγώνου και λέγονται έδρες.

- Το ζάρι είναι ένας κύβος. Πόσες έδρες έχει; ....
- Γιατί πιστεύεις ότι το ζάρι έχει τη μορφή κύβου και όχι κάποιου άλλου στερεού σώματος; ....

  ....

- Ανάφερε κάποια άλλα αντικείμενα που είναι κύβοι: ....

  ....



Στο διπλανό σχέδιο φαίνεται ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε ζάρι από χαρτί. Αυτό το σχέδιο λέγεται ανάπτυγμα.

- Φτιάξε ένα ίδιο και κατασκεύασε ένα ζάρι. Πρόσεξε πώς θα βάλεις τους αριθμούς στις έδρες του. Οι απέναντι έδρες πρέπει να έχουν άθροισμα 7.
- Προσπάθησε να βρεις και κάποιο άλλο ανάπτυγμα για να κατασκευάσεις το ζάρι.

Δραστηριότητα 2η

Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, όπως ο κύβος, είναι ένα γεωμετρικό στερεό σώμα με επίπεδες επιφάνειες που λέγονται έδρες.

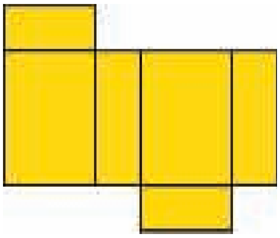
- Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένα κουτί από δημητριακά που συνηθίζονται για πρωινό. Το κουτί αυτό είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Πόσες έδρες έχει;
- Ποια είναι η διαφορά που έχουν οι έδρες του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου από τις έδρες του κύβου;

  ....

  ....

- Ανάφερε κάποια άλλα αντικείμενα που είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα: ....

  ....



Στο διπλανό σχέδιο φαίνεται το ανάπτυγμα του κουτιού των δημητριακών.

- Φτιάξε ένα ίδιο και κατασκεύασε ένα δικό σου κουτί για δημητριακά. Μετά προσπάθησε να βρεις και κάποιο άλλο ανάπτυγμα και να κατασκευάσεις ένα ίδιο κουτί.
- Σύγκρινε τα αναπτύγματα του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ποιο από τα δύο στερεά νομίζεις ότι έχει περισσότερα αναπτύγματα; ....

  Γιατί; ....

Παρατηρώντας τον κύβο και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαπιστώνουμε ότι:

Κύβος - Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

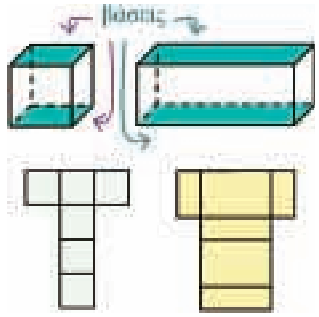
Η επιφάνεια του **κύβου** αποτελείται από **6 έδρες**. Το ίδιο και η επιφάνεια του **ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου**.

Στον κύβο όλες οι έδρες είναι τετράγωνα και είναι ίσες μεταξύ τους, ενώ στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και είναι ίσες οι απέναντι έδρες του ανά δύο.

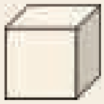
Η έδρα πάνω στην οποία στηρίζεται το γεωμετρικό στερεό και η απέναντί της λέγονται **βάσεις** του. Οι υπόλοιπες έδρες αποτελούν την **παράπλευρη επιφάνειά** του. Οι βάσεις και η παράπλευρη επιφάνεια μαζί αποτελούν την **ολική επιφάνεια** του στερεού.

Ανάπτυγμα ενός στερεού λέγεται το αποτύπωμα των εδρών του σε ένα επίπεδο με συνεχόμενο τρόπο, έτσι ώστε με δίπλωση να σχηματίσουν το στερεό.

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η **Εμβαδό επιφάνειας κύβου**



Πόσα τετραγωνικά μέτρα ύφασμα χρειάζομαι για να «ντύσω» τον ξύλινο κύβο με ακμή 50 εκατοστά; Πόσα μέτρα θα χρειαστώ αν θέλω να ντύσω μόνο την παράπλευρη επιφάνεια;

Λύση:

Αφού οι έδρες του κύβου είναι τετράγωνα, για να βρω το εμβαδό της μιας έδρας, πολλαπλασιάζω το μήκος της μιας ακμής με τον εαυτό της: $E_{(έδρας)} = α \cdot α$.

$E_{(έδρας)}$ = ...

Για να βρω το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κύβου πολλαπλασιάζω το εμβαδό της μιας έδρας επί 4, και για το εμβαδό της ολικής επιφάνειας επί 6.

Άρα ολική επιφάνεια = ... παράπλευρη επιφάνεια = ...

Απάντηση: Για όλη την επιφάνεια θα χρειαστώ .... τ.μ., ενώ μόνο για την παράπλευρη επιφάνεια θα χρειαστώ .... τ.μ. ύφασμα.

Εφαρμογή 2η **Εμβαδό επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου**

Πόσα τετραγωνικά μέτρα ύφασμα χρειάζομαι για να «ντύσω» όλη την επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου της διπλανής εικόνας;

Λύση:

Αφού γνωρίζω ότι οι έδρες του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ανά δύο απέναντι ίσες, ένας τρόπος για να εργαστώ είναι ο εξής:

α. Να βρω το εμβαδό μιας έδρας από κάθε ζευγάρι ....

β. Να πολλαπλασιάσω το καθένα επί 2 ....

γ. Να προσθέσω τα τρία γινόμενα ....

Απάντηση: Για το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο χρειάζομαι .... τ.μ. ύφασμα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, έδρες, βάσεις, παράπλευρη** και **ολική επιφάνεια** και **ανάπτυγμα**. Φτιάξε ένα κύβο και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και εξήγησε τους όρους αυτούς στα στερεά σου.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Ο κύβος έχει μόνο ένα ανάπτυγμα.	❒	❒
Για να βρούμε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου χρειάζονται οι τρεις διαστάσεις του.	❒	❒

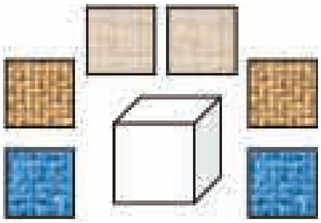
Κεφάλαιο 67ο

Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: ακμές και κορυφές

Συναρμολογώντας κομμάτια

Αναγνωρίζω τις ακμές και τις κορυφές των στερεών σωμάτων.
Κατασκευάζω και παρατηρώ μοντέλα κύβων και ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων.
Σχεδιάζω κύβο και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σε χαρτί.

Δραστηριότητα 1η

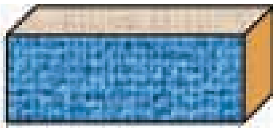


Θέλοντας να «ντύσουμε» τον κύβο με ύφασμα, κατασκευάσαμε 6 ξεχωριστά τετράγωνα και βάλαμε το καθένα πάνω σε μία έδρα. Μετά ράψαμε κάθε τετράγωνο με τα διπλανά του.

- Πόσες ραφές υπάρχουν; ....
- Εξήγησε τη σκέψη σου:..
- Αν θελήσουμε στις άκρες των ραφών να βάλουμε μία φουντίτσα, πόσες φουντίτσες θα χρειαστούμε; Εξήγησε τη σκέψη σου: ....

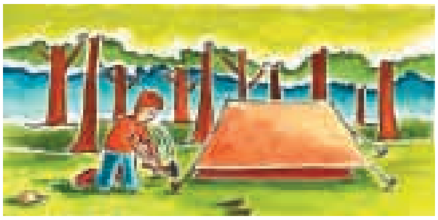
  ....

  ....



- Αν κάναμε το ίδιο πράγμα σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πόσες ραφές θα υπήρχαν; ....
- Πόσες φουντίτσες; ....
- Γιατί; ....

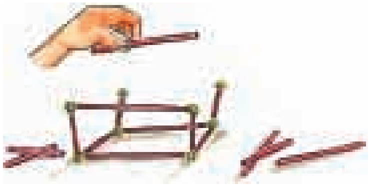
Δραστηριότητα 2η



Όταν στήνουμε μια σκηνή, αυτό που πρέπει να κάνουμε πρώτα είναι να φτιάξουμε το «σκελετό» της και μετά να τον τυλίξουμε με το ύφασμα.

- Να φτιάξεις χρησιμοποιώντας καλαμάκια και πλαστελίνη, το «σκελετό» ενός κύβου με ακμή 10 εκατοστόμετρα.

- Πόσα καλαμάκια χρησιμοποίησες; ....
- Τι είναι κάθε καλαμάκι για τον κύβο σου; ....
- Πόσες ενώσεις πλαστελίνης έκανες; ....
- Τι είναι κάθε ένωση πλαστελίνης για τον κύβο σου; ....



- Για να φτιάξεις τώρα με τα ίδια υλικά το «σκελετό» ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, σε πόσες διαφορετικές διαστάσεις πρέπει να κόψεις τα καλαμάκια; ....
- Για να διευκολυνθείς, μπορείς να διαλέξεις διαφορετικό χρώμα για κάθε διάσταση.
- Σύγκρινε τον αριθμό των ακμών και τον κορυφών ανάμεσα στις δύο κατασκευές σου.
- Τι παρατηρείς; ....

  ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι:

Κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο
Ακμή είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο έδρες. Ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν **12 ακμές**.
Κορυφή είναι το σημείο συνάντησης τριών ακμών. Ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν **8 κορυφές**.

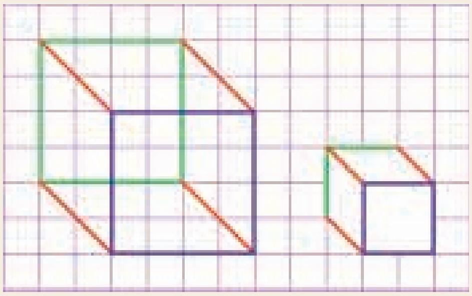
Παραδείγματα

Εφαρμογή 1η *Σχεδιάζω κύβο και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σε χαρτί*

Οι αρχιτέκτονες, εκτός από τα σχέδια που κάνουν για να απεικονίσουν το εσωτερικό των σπιτιών, πολλές φορές χρειάζεται να κάνουν σχέδια που να απεικονίζουν την εξωτερική όψη των κτιρίων. Πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν κύβο ή ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σε ένα χαρτί;

Λύση - Απάντηση:

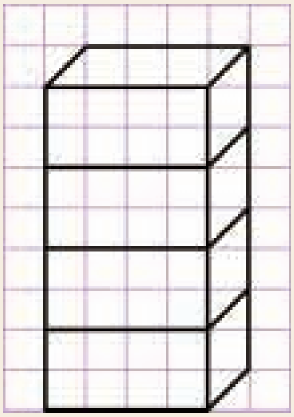
Ένας τρόπος είναι ο παρακάτω:



1. Σχεδιάζουμε τη μία έδρα.
2. Σχεδιάζουμε την απέναντί της έδρα, που είναι ίση με την πρώτη. Η μία έδρα μπορεί να επικαλύπτει την άλλη.
3. Σχεδιάζουμε τις ακμές που λείπουν, ενώνοντας μ' αυτές τις δύο έδρες. Μπορούμε να σχεδιάσουμε με διακεκομμένη γραμμή τις ακμές που δεν φαίνονται στην πραγματικότητα, αν θέλουμε το στερεό να φαίνεται διαφανές, ή να τις σβήσουμε, αν θέλουμε το στερεό να φαίνεται αδιαφανές.

Εφαρμογή 2η

Σύμφωνα με τον παραπάνω τρόπο σχεδιάστε μια πολυκατοικία που το ύψος της να είναι 20 μέτρα και το μήκος της πρόσοψής της να είναι 10 μέτρα, με κλίμακα 1 : 500



Λύση - Απάντηση:

Πρώτα υπολογίζουμε τις διαστάσεις στο σχέδιο σύμφωνα με την κλίμακα:
20 **:** 500 = ... μ. δηλ. .... εκ.
10 **:** 500 = ... μ. δηλ. .... εκ.
Σύμφωνα με τις διαστάσεις αυτές, σχεδιάζουμε το ορθογώνιο που θα είναι η μία έδρα του παραλληλεπιπέδου.
Μετά σχεδιάζουμε το ορθογώνιο που θα είναι η απέναντι έδρα, όσο πίσω θέλουμε να φαίνεται στο σχέδιό μας. Προσέχουμε να σβήσουμε τις ακμές που ενώνουν τις δύο αυτές έδρες, όπου δεν φαίνονται στην πραγματικότητα.
Μπορούμε να συμπληρώσουμε το σχέδιο σχεδιάζοντας τα μπαλκόνια ή την πόρτα της πολυκατοικίας.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **ακμή** και **κορυφή**. Εξήγησε τους όρους αυτούς σε ένα κύβο και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Κάθε έδρα του κύβου έχει 4 ακμές Άρα, αφού ο κύβος έχει 6 έδρες, έχει 24 ακμές.	❐	❐
Η κορυφή στον κύβο είναι πάντα η συνάντηση 3 ακμών.	❐	❐

Κεφάλαιο 68ο

Κύλινδρος

Να το τυλίξω;

Σχεδιάζω το ανάπτυγμα και κατασκευάζω κύλινδρο.
Κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού των βάσεων, της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.
Σχεδιάζω κύλινδρο σε επίπεδη επιφάνεια.

Δραστηριότητα 1η

Ο κύλινδρος είναι ένα γεωμετρικό στερεό με μια καμπύλη επιφάνεια και δύο παράλληλες βάσεις σε σχήμα κυκλικού δίσκου.
Πολλά αντικείμενα καθημερινής χρήσης είναι κύλινδροι.

- Ανάφερε κάποια αντικείμενα που να είναι κύλινδροι: ....
....
- Για να «ντύσεις» έναν κύλινδρο με χαρτί, πόσα κομμάτια χαρτί θα χρησιμοποιήσεις (το λιγότερο) και τι σχήμα θα έχει το καθένα; ....
....
- Σχεδίασε αυτά τα κομμάτια σε μια σειρά, ώστε να αποτελούν το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου.
- Αν αντιγράψεις το ανάπτυγμα που έφτιαξες σε χαρτί και το κόψεις, θα γίνει κύλινδρος; ....
....

  Τι σχέση πρέπει να έχει η βάση με την παράπλευρη επιφάνεια, ώστε το ανάπτυγμα που θα σχεδιάσεις να μπορεί να γίνει κύλινδρος; ....
....

Δραστηριότητα 2η

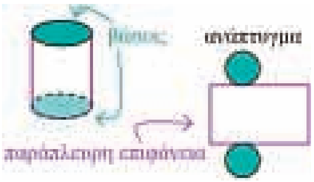
- Σχεδίασε ένα ανάπτυγμα για ένα κύλινδρο με τις διαστάσεις που θέλεις.
- Για να υπολογίσουμε πόσο χαρτί θα χρειαστεί για την κατασκευή αυτού του κυλίνδρου, τι πρέπει να υπολογίσουμε; ....
- Πώς θα υπολογίσεις, με τη βοήθεια του αναπτύγματος που έφτιαξες, την επιφάνεια του κυλίνδρου (βάσεις, παράπλευρη και ολική;)...................
....
....
....
- Ποιες μετρήσεις είναι απαραίτητες για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την επιφάνεια (βάσεις, παράπλευρη και ολική) του κυλίνδρου, χωρίς να βλέπουμε το ανάπτυγμά του;
....
....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι:

Κύλινδρος

Ο **κύλινδρος** είναι το γεωμετρικό στερεό σώμα που έχει δύο παράλληλες και ίσες μεταξύ τους **κυκλικές βάσεις** και **καμπύλη παράπλευρη επιφάνεια**. Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου είναι η επιφάνεια ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου, του οποίου η μία διάσταση είναι ίση με το ύψος του κυλίνδρου και η άλλη είναι ίση με το μήκος του κύκλου της βάσης.

Παραδείγματα



Για να βρούμε το εμβαδό της επιφάνειας του κυλίνδρου (παράπλευρης, βάσεων και ολικής), αρκεί να γνωρίζουμε το μήκος της ακτίνας του κύκλου και το ύψος του κυλίνδρου.

Εφαρμογή 1η

Ένα κυλινδρικό κουτί για αναψυκτικό έχει τις εξής διαστάσεις: ύψος 12 εκ. και διάμετρο βάσης 6 εκ. Πόσα τετραγωνικά εκατοστά αλουμίνιο χρειάζονται για να κατασκευαστεί;

Λύση:

Χρειάζεται να βρούμε την ολική επιφάνεια του κυλίνδρου.

Εμβαδό βάσης: $E_{(\text{κυκλικού δίσκου})} = \pi \cdot α^2$. Η ακτίνα της βάσης είναι 6 : 2 = 3 εκ. Άρα το εμβαδό είναι $3{,}14 \cdot 3^2 = 3{,}14 \cdot 9 = 28{,}26$ τ.εκ.

Εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας: $E_{(\text{παραλληλογράμμου})} = β \cdot υ$.

Η βάση του είναι ίση με $\pi \cdot δ = 3{,}14 \cdot 6 = 18{,}84$ εκ. Άρα το εμβαδό του είναι $18{,}84 \cdot 12 = 226{,}08$ τ.εκ.

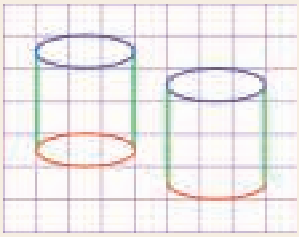
Εμβαδό ολικής επιφάνειας = εμβαδό βάσεων + εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας. Άρα αφού οι βάσεις είναι 2 έχουμε:

Εμβαδό ολικής επιφάνειας = 28,26 · 2 + 226,08 = 56,52 + 226,08 = 282,6 τ.εκ.

Απάντηση: Για κάθε κουτί αναψυκτικό χρειάζονται 282,6 τ.εκ. αλουμίνιο.

Εφαρμογή 2η **Σχεδιάζω κύλινδρο σε χαρτί**

Όταν χρειάζεται να απεικονίσουμε σε χαρτί ένα κύλινδρο, ακολουθούμε τα βήματα που ακολουθήσαμε και για το σχεδιασμό των παραλληλεπίπεδων στερεών.



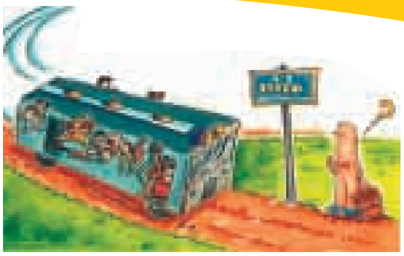
1. Σχεδιάζουμε τη μία βάση. (Ας μην ξεχνάμε ότι, όταν δεν βλέπουμε τον κύκλο ακριβώς από πάνω, δεν φαίνεται «κυκλικός».)
2. Σχεδιάζουμε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα που θα ενώνουν τις δύο βάσεις (κάθετα σ' αυτές) και θα ορίζουν την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.
3. Τέλος, σχεδιάζουμε την απέναντι βάση, όπως την πρώτη.
   Αν θέλουμε ο κύλινδρος να φαίνεται αδιαφανής, σβήνουμε το πίσω μέρος της κάτω βάσης.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **ανάπτυγμα, βάση** και **παράπλευρη επιφάνεια** κυλίνδρου. Εξήγησε τους όρους αυτούς σε έναν κύλινδρο που έφτιαξες.

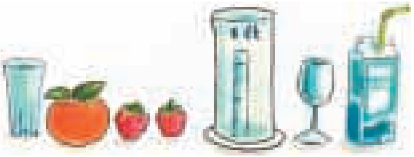
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Ο κύλινδρος δεν έχει ακμές και κορυφές.	❒	❒
Όταν σχεδιάζω τον κύλινδρο σε χαρτί σχεδιάζω ημικύκλια για βάσεις.	❒	❒

Όγκος – Χωρητικότητα



Γέμισε; Χωράω κι εγώ;

Κατανοώ το λίτρο ως μονάδα χωρητικότητας.
Κατανοώ το κυβικό εκατοστό ως μονάδα όγκου και μαθαίνω τη σχέση του με τα πολλαπλάσιά του.
Εκφράζω τις μετρήσεις όγκου με φυσικούς, δεκαδικούς και συμμιγείς αριθμούς.
Λύνω προβλήματα που αναφέρονται σε όγκους.



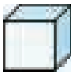
Δραστηριότητα 1η

Σε μια συνταγή για παγωτό φρούτων διαβάζουμε:

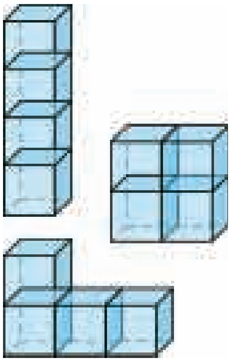
Χτυπήστε στο μίξερ:
1 λιωμένη μπανάνα
1 ποτήρι λιωμένες φράουλες
1 ποτήρι γάλα
και συμπληρώστε με χυμό πορτοκάλι μέχρι να γίνει 1 λίτρο

- Πώς θα ξέρεις ότι έγινε 1 λίτρο; ....
  ....
- Πόσα ποτήρια νομίζεις ότι «έχει» περίπου το 1 λίτρο; ....
- Αν χρειαζόσουν 40 ποτήρια χυμό για ένα πάρτι, πόσα λίτρα χυμός είναι περίπου; ....
- Έχουν το ίδιο βάρος 1 λίτρο γάλα και 1 λίτρο χυμός; ....
- Τι κοινό έχουν; ....
- Ανέφερε κάποια άλλα «δοχεία» με τα οποία μετράμε υγρά: ....
  ....
- Τα δοχεία που χωράνε την ίδια ποσότητα υγρού λέμε ότι έχουν την ίδια ....

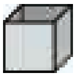
Δραστηριότητα 2η



- Με ένα ανάπτυγμα κύβου να κατασκευάσεις ένα κυβικό εκατοστό, δηλαδή έναν κύβο του οποίου κάθε ακμή θα είναι ίση με 1 εκατοστό.



- Χρησιμοποιώντας το κυβικό εκατοστό που έφτιαξε ο καθένας στην ομάδα «χτίστε» έναν πύργο.
- Πόσα κυβικά εκατοστά είναι ο πύργος που φτιάξατε; ....
- Τι πληροφορία δίνει αυτή η μέτρηση σε κάποιον για τον πύργο σας; Επιλέξτε το σωστό: το βάρος του, το μήκος του, το ύψος του, το πλάτος του, το χώρο που καταλαμβάνει.
- Κάθε στερεό σώμα καταλαμβάνει χώρο. Πόσο χώρο καταλαμβάνει ο πύργος σας; ....



- Χρησιμοποιώντας όλους τους κύβους δοκιμάστε να τους βάλετε με άλλη διάταξη ώστε να φτιάξετε άλλες κατασκευές.
- Πόσο χώρο καταλαμβάνει κάθε σας κατασκευή;...

  Το κυβικό εκατοστό που έφτιαξες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως δοχείο.
- Αν το γεμίσουμε με νερό ποια νομίζεις ότι είναι η χωρητικότητά του; ....
  ....
- Πόσα τέτοια κυβικά εκατοστά θα χρειαζόταν για να γεμίσει με νερό το ποτήρι του χυμού της προηγούμενης δραστηριότητας; ....
- Πόσα κυβικά εκατοστά ισοδυναμούν με 1 λίτρο νερό; ....
- Ζυγίστε 1 λίτρο νερό και γράψτε πόσο βάρος έχει. ....

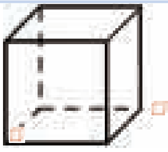
Οι παραπάνω δραστηριότητες μας βοηθούν να διαπιστώσουμε ότι:

Παραδείγματα

Όγκος, χωρητικότητα

Ο χώρος που καταλαμβάνει ένα στερεό σώμα ονομάζεται **όγκος**. Μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το **κυβικό μέτρο (κ.μ.)**. Ένα κ. μ. είναι ένας κύβος με ακμή ίση με ένα μέτρο.
Υποδιαιρέσεις του κ. μ. που χρησιμοποιούμε για μικρότερες μετρήσεις είναι το κυβικό δεκατόμετρο (κ. δεκ.), το κυβικό εκατοστόμετρο (κ. εκ.) και το κυβικό χιλιοστόμετρο
1 κ. μ. = 1.000 κ. δεκ = 1.000.000 κ. εκ. = 1.000.000.000 κ. χιλ.

Χωρητικότητα ενός δοχείου είναι ο όγκος της ποσότητας που μπορεί να χωρέσει το δοχείο.
Η ποσότητα του υγρού ή αερίου που χωράει σε 1 κυβικό δεκατόμετρο ονομάζεται **1 λίτρο**. 1 λίτρο νερό ζυγίζει 1 κιλό.



Για να εκφράσουμε τον όγκο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε φυσικό, δεκαδικό ή συμμιγή αριθμό.

2.570.050 κ.εκ. = 2,57005 κ.μ.
= 2 κ.μ. 570 κ.δεκ. 50 κ.εκ.

Εφαρμογή 1η

Κάνοντας μια ομαδική εργασία για την κατανάλωση νερού τα παιδιά έφεραν πληροφορίες για την τελευταία κατανάλωση της οικογένειάς τους και κατέγραψαν τα στοιχεία σε πίνακες. Παρακάτω φαίνεται η εργασία μιας ομάδας.

Οικογένεια	**Όγκος νερού που καταναλώθηκε το τελευταίο τρίμηνο**		
	Δεκαδικός αριθμός	***Συμμιγής αριθμός***	***Φυσικός αριθμός***
Μογιού	14,752 κ. μ.		
Σφαντού		8 κ. μ. 50 κ. δεκ.	
Κείσαρη			11. 450.900 κ. εκ.
Παπάντου			8.560 κ. δεκ.
Συνολική κατανάλωση οικογενειών της ομάδας			

Να συμπληρώσετε τα κενά στον πίνακα μετατρέποντας τους αριθμούς στις υπόλοιπες μορφές και να βρείτε τα σύνολα.

Εφαρμογή 2η

Το μικρό μπουκάλι με νερό χωράει 0,5 λίτρα. Όταν άδειασε το ζύγισα και διαπίστωσα ότι άδειο ζύγιζε 15 γραμμάρια. Αν το ζύγιζα γεμάτο, πόσο θα ζύγιζε;

Λύση
Αφού το 1 λίτρο νερό ζυγίζει 1 κιλό, τα 0,5 λίτρα ζυγίζουν 0,5 κιλά, δηλαδή 500 γραμμάρια.
Προσθέτω και το βάρος του μπουκαλιού: 500 + 15 = 515 γραμμάρια.
Απάντηση: Θα ζύγιζε 515 γραμμάρια.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **χωρητικότητα, λίτρο, όγκος** και **κυβικό μέτρο** με τις υποδιαιρέσεις του. Να εκφράσεις μια μέτρηση όγκου με διαφορετικούς τρόπους.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
1.000 κ. εκ. νερό είναι 1 λίτρο.	❒	❒
Όλα τα στερεά σώματα έχουν χωρητικότητα.	❒	❒
350 κ. δεκ. = 350.000 κ.εκ.	❒	❒

Κεφάλαιο 70ό

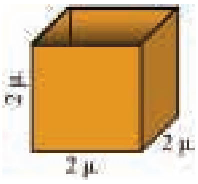
Όγκος κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Κύβοι και κιβώτια

Κατανοώ τη διαδικασία υπολογισμού του όγκου κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.
Υπολογίζω τον όγκο κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τύπο.
Λύνω προβλήματα με όγκους κύβων και ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων.

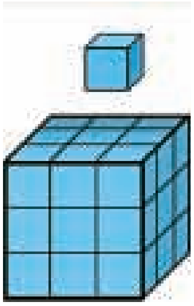
Δραστηριότητα 1η

Γνωρίζεις ότι ως μονάδα μέτρησης του όγκου χρησιμοποιείται ένας κύβος που η ακμή του είναι ένα μέτρο και ονομάζεται κυβικό μέτρο. Για μικρότερες μετρήσεις χρησιμοποιείται το κυβικό δεκατόμετρο ή το κυβικό εκατοστόμετρο.



- Ποιο εργαλείο από τα προηγούμενα θα χρησιμοποιήσεις για να μετρήσεις τον όγκο του κουτιού που φαίνεται δίπλα και με τι τρόπο θα το κάνεις; ....
- Ποιος είναι ο όγκος του; ....
- Είναι πάντοτε εύκολο να βρίσκουμε τον όγκο των σωμάτων χρησιμοποιώντας ένα εργαλείο μέτρησης όπως είναι αυτό που χρησιμοποίησες; ....
- Γιατί; ....

Δραστηριότητα 2η



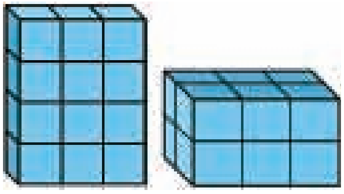
Η κατασκευή που φαίνεται στην εικόνα είναι φτιαγμένη από κύβους με ακμή ίση με 1 εκ. Καθένας είναι ένα κυβικό εκατοστό.

- Ποιος είναι ο όγκος της κατασκευής; ....
- Εξήγησε τη σκέψη σου: ....
  ....
- Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με στοιχεία για κατασκευές που φτιάχνονται με κυβικά εκατοστά όπως η προηγούμενη.

Μήκος	Πλάτος	Εμβαδό βάσης	Αριθμός στρώσεων	Ύψος	Όγκος
3 εκ.	3 εκ.		3	3 εκ.	
			4		
			5		

- Μελέτησε τώρα τις διπλανές κατασκευές και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.

Μήκος	Πλάτος	Εμβαδό βάσης	Αριθμός στρώσεων	Ύψος	Όγκος
.... εκ.	.... εκ.			.... εκ.	
.... εκ.	.... εκ.			.... εκ.	



- Πώς μπορούμε να βρούμε τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, χωρίς να το «χωρίσουμε» σε κυβικά εκατοστά; ....
  ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι, για να μετρήσουμε τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να χρησιμοποιήσουμε ένα εργαλείο μέτρησης.
Μπορούμε όμως εύκολα να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού αυτού πολλαπλασιάζοντας το μήκος επί το πλάτος του, ώστε να βρούμε το εμβαδό της βάσης και μετά να πολλαπλασιάσουμε αυτό επί το ύψος του.

Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και κύβου

Παραδείγματα

Ο **όγκος** ενός **ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου** είναι ίσος με το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος επί το ύψος του.

Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $\mathbf{O_{(παραλληλεπιπέδου)} = α \cdot β \cdot γ}$.

Ο **όγκος** του **κύβου** είναι ίσος με το γινόμενο των ακμών που εκφράζουν το μήκος, το πλάτος και το ύψος του.
Επειδή οι ακμές του κύβου είναι ίσες μεταξύ τους, αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $\mathbf{O_{(κύβου)} = α \cdot α \cdot α}$ ή $\mathbf{O_{(κύβου)} = α^3}$.

Εφαρμογή ***Φανταστείτε πόσο μεγάλη πρέπει να είναι η πισίνα για μια φάλαινα!***

Η φάλαινα που πρωταγωνίστησε στην ταινία «Ελευθερώστε το Willy», όσο ήταν μικρή ζούσε σε μια πισίνα στο Μεξικό. Οι διαστάσεις της πισίνας ήταν 28 μέτρα μήκος, 13 μέτρα πλάτος και 6 μέτρα ύψος (ή βάθος καλύτερα).
Μεγάλωσε όμως τόσο που δεν χωρούσε πια στην πισίνα αυτή.
Έτσι οι υπεύθυνοι αναγκάστηκαν να τη στείλουν σε μια άλλη πόλη, το Όρεγκον, όπου κατασκευάστηκε μία πισίνα με διαστάσεις 46 μ. μήκος, 23 μ. πλάτος και 8 μ. ύψος.
Εκεί χωράει να κινείται με άνεση και μπορεί κανείς να τη δει να παίζει, αφού η καινούρια πισίνα έχει γυάλινα τμήματα στα πλαϊνά της.
Πόσο μεγαλύτερη είναι η νέα πισίνα της φάλαινας;

Λύση:
Το μέγεθος μιας πισίνας κρίνεται όχι μόνο από τις δύο διαστάσεις της που φαίνονται , αλλά και από το βάθος της, που είναι εξίσου σημαντικό. Χρειάζεται λοιπόν να βρούμε τον όγκο κάθε πισίνας για να τις συγκρίνουμε.

Ο όγκος της πρώτης πισίνας ήταν: $\mathbf{O_{(παραλληλεπιπέδου)} = α \cdot β \cdot γ}$

.... • .... • .... = ...

Ο όγκος της νέας πισίνας είναι: $\mathbf{O_{(παραλληλεπιπέδου)} = α \cdot β \cdot γ}$

.... • .... • .... = ...

Τώρα πρέπει να βρούμε τη διαφορά τους: ....

Απάντηση: Η νέα πισίνα είναι .... κ.μ. μεγαλύτερη.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **όγκος παραλληλεπιπέδου** και **όγκος κύβου** Να υπολογίσεις τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου που υπάρχει κοντά σου.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Για να βρούμε τον Όγκο$_{(κύβου)}$ αρκεί να γνωρίζουμε το μήκος της ακμής του.	❐	❐
Για να βρούμε τον Όγκο$_{(παραλληλεπιπέδου)}$ πρέπει να γνωρίζουμε και τις 3 διαστάσεις του.	❐	❐
Για να κατασκευάσω ένα μοντέλο κυβικού μέτρου χρειάζομαι 3 ξύλα του 1 μέτρου.	❐	❐

Κεφάλαιο 71ο

Όγκος κυλίνδρου

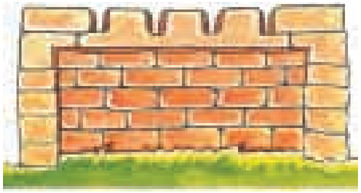
Τύπος συντηρητικός!

Κατανοώ τη διαδικασία υπολογισμού του όγκου του κυλίνδρου.
Υπολογίζω τον όγκο του κυλίνδρου με τύπο.
Λύνω προβλήματα με όγκους κυλίνδρων.

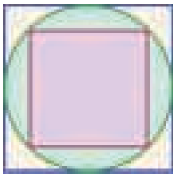
Δραστηριότητα 1η

Μία αρχαιολόγος, στην έρευνά της σε αρχαία τείχη, ανακάλυψε ένα κυλινδρικό πυργίσκο που ήταν γεμάτος χώμα. Μέρος της εργασίας των αρχαιολόγων είναι να απομακρύνουν το χώμα και τα άχρηστα υλικά που συσσωρεύονται σε στρώματα στα ερείπια.

- Πιστεύεις ότι η αρχαιολόγος μπορούσε να εκτιμήσει τον όγκο του χώματος προτού τον απομακρύνουν; ....
....
- Σε τι μοιάζουν ένα κυλινδρικό στερεό σώμα και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο;..........................
....
- Σε τι διαφέρουν; ....
....



Δραστηριότητα 2η



Στη διπλανή εικόνα φαίνονται τρία δοχεία. Έχουμε βάλει το ένα μέσα στο άλλο και τα κοιτάζουμε από ψηλά. Το ύψος τους είναι το ίδιο.

- Ποιο από τα δύο παραλληλεπίπεδα δοχεία πιστεύεις ότι έχει μεγαλύτερο όγκο και γιατί; ....
....
- Κάνε τώρα μια εκτίμηση και για τον όγκο του κυλινδρικού δοχείου σε σχέση με των δύο παραλληλεπίπεδων δοχείων (πρώτα με το μεγάλο και μετά με το μικρό) και εξήγησε τη σκέψη σου:
....
....
....
- Πώς θα υπολόγιζες τον όγκο των παραλληλεπίπεδων αυτών σωμάτων; ....
....
- Σκέψου πώς μπορείς να εφαρμόσεις την ίδια μέθοδο για να υπολογίσεις τον όγκο του κυλίνδρου:
....
....
....
....

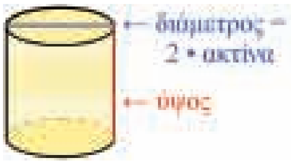
Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι, μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός κυλινδρικού σώματος, όπως και των παραλληλεπίπεδων σωμάτων. Βρίσκουμε πρώτα το εμβαδό της βάσης και μετά το πολλαπλασιάζουμε επί το ύψος του.

Όγκος κυλίνδρου

Ο **όγκος** ενός **κυλίνδρου** είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του *(δηλαδή του αριθμού* π επί το τετράγωνο της ακτίνας: $\mathbf{E_{(κυκλικού\ δίσκου)}} = \pi \cdot a^2$*)* επί το ύψος του.

Αυτό εκφράζεται με τον τύπο $\mathbf{O_{(κυλίνδρου)} = \pi \cdot a^2 \cdot u}$.

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η ***Από το παραλληλεπίπεδο στον κύλινδρο***

Ο Λευτέρης βγάζει το πρωί το γάλα από το ψυγείο και το αδειάζει στο ποτήρι του, όπως φαίνεται στην εικόνα.
Καταλαβαίνει ότι το γάλα τελειώνει και το αδειάζει όλο. Διαπιστώνει με έκπληξη ότι το γάλα γεμίζει το ποτήρι ακριβώς μέχρι το χείλος. Αναρωτιέται «άραγε το κουτί με το γάλα ήταν γεμάτο;».

Λύση:

Για να κάνουμε τη σύγκριση πρέπει να βρούμε αν τα δύο σώματα (κουτί με γάλα και ποτήρι) έχουν την ίδια χωρητικότητα. Επειδή και τα δύο έχουν πολύ λεπτό τοίχωμα, θα θεωρήσουμε ότι η χωρητικότητά τους είναι ίση με τον όγκο τους.

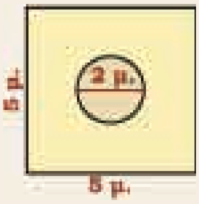
Ο όγκος του κουτιού είναι: $\mathbf{O_{(παραλληλεπιπέδου)} = a \cdot b \cdot \gamma}$

$10 \cdot 7 \cdot 7 =$ ....

Ο όγκος του ποτηριού είναι: $\mathbf{O_{(κυλίνδρου)} = \pi \cdot a^2 \cdot u}$ ($a = δ/2$) $3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 12 =$ ....

Απάντηση: ....

Εφαρμογή 2η



Στο κλιμακοστάσιο ενός κτιρίου με 18 μέτρα ύψος, το ασανσέρ έχει κυλινδρικό σχήμα και γύρω του υπάρχουν σκάλες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πόσος είναι ο όγκος που καταλαμβάνει το φρεάτιο του ασανσέρ και πόσος ο υπόλοιπος όγκος του κλιμακοστασίου;

Λύση:

Βρίσκουμε πρώτα τον όγκο του φρεατίου. $\mathbf{O_{(κυλίνδρου)} = \pi \cdot a^2 \cdot u}$ ($a = δ/2$) ....

Μετά υπολογίζουμε τον όγκο όλου του κλιμακοστασίου (που συμπεριλαμβάνει τις σκάλες και το φρεάτιο του ασανσέρ): $\mathbf{O_{(παραλληλεπιπέδου)} = a \cdot b \cdot \gamma}$..

Τέλος αφαιρούμε τον όγκο του φρεατίου: ....

Απάντηση: Το ασανσέρ καταλαμβάνει .... κ.μ. και οι σκάλες .... κ.μ. του κτιρίου.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **χωρητικότητα, λίτρο, όγκος** και **κυβικό μέτρο** με τις υποδιαιρέσεις του. Να εκφράσεις μια μέτρηση όγκου με διαφορετικούς τρόπους.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Για να βρούμε τον **Όγκο**$_{\mathbf{(κυλίνδρου)}}$ *πολλαπλασιάζουμε την περίμετρο της βάσης επί το ύψος.*	❒	❒
Για να βρούμε τον **Όγκο**$_{\mathbf{(κυλίνδρου)}}$ *αρκεί να γνωρίζουμε την ακτίνα και το ύψος του.*	❒	❒

Σχημα...τίζω άποψη

ΠΟΛΥΓΩΝΑ

τρίγωνο

τετράπλευρο

πεντάγωνο

κανονικό πεντάγωνο

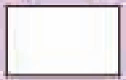
εξάγωνο

οκτάγωνο

....

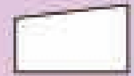
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

τετράγωνο


ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

ρόμβος

παραλληλόγραμμο


τραπέζιο

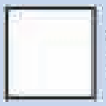
τετράπλευρο

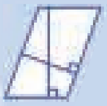
ΓΩΝΙΕΣ

άθροισμα γωνιών τριγώνου

άθροισμα γωνιών τετράπλευρου

ΕΜΒΑΔΟ


τετραγώνου
$E = α^2$


παραλληλογράμμου
$E = β \cdot υ$

τριγώνου
$E = (β \cdot υ) / 2$

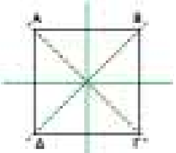
τραπεζίου
$E = (β + B) \cdot υ / 2$

κυκλικού δίσκου
$E = π \cdot α^2$

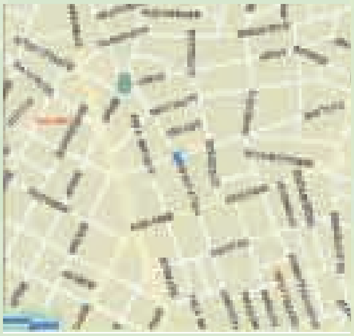
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΜΕΓΕΘΥΝΣΗ-ΣΜΙΚΡΥΝΣΗ

στη φύση

στις ανθρώπινες κατασκευές


στα σχήματα

ΚΛΙΜΑΚΑ

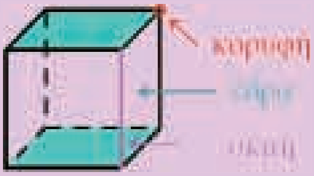


Κλίμακα είναι ο λόγος:

$$\frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{απόσταση στην πραγματικότητα}}$$

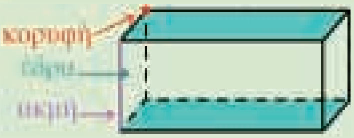
Για τη μεγέθυνση ή τη σμίκρυνση ενός σχήματος τηρούμε αναλογία με την κλίμακα

ΚΥΒΟΣ



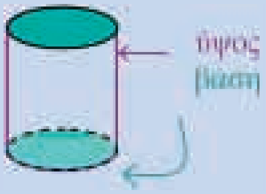
6 έδρες, 12 ακμές, 8 κορυφές
Όγκος $_{\text{κύβου}}$ (με ακμή α) = **$α^3$**
(Η **χωρητικότητα** του κ. δεκ. είναι 1 λίτρο.)

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ



6 έδρες, 12 ακμές, 8 κορυφές
Όγκος $_{\text{ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου}}$ (με διαστάσεις μήκος α, πλάτος β, ύψος γ) = **$α \cdot β \cdot γ$**

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ



Όγκος κυλίνδρου (με ύψος υ και ακτίνα βάσης α) = **$π \cdot α^2 \cdot υ$**

1ο Πρόβλημα

Να υπολογίσεις (χωρίς να χρησιμοποιήσεις το μοιρογνωμόνιο) το μέγεθος των γωνιών χ και ψ στο σχήμα.

Λύση

Απάντηση: ....

2ο Πρόβλημα

Σχεδιάστε με την ομάδα σου ένα κιβώτιο για να γίνεται η διακίνηση των δημητριακών από το εργοστάσιο και εξηγήστε πόσα πακέτα δημητριακών θα χωράει.

Λύση

Απάντηση: ....

3ο Πρόβλημα

Εξήγησε ποιες μαθηματικές έννοιες είναι απαραίτητες στην κατασκευή ενός σπιτιού. και σε ποια φάση της κατασκευής είναι απαραίτητη η καθεμιά.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Αλφαβητικό ευρετήριο όρων και ονομάτων

Όρος ή όνομα	σελίδα
Άγνωστος	62, 71
Άθροισμα γωνιών	142
Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρου	142, 170
Άθροισμα γωνιών τριγώνου	142, 170
Ακμή	160, 170
Ακολουθία	130
Αναγωγή στη Μονάδα	86
Ανάγωγο κλάσμα	50
Ανάλογα ποσά	84, 105
Αναλογία	78
Αντιστρόφως ανάλογα ποσά, αντίστροφα ποσά	88, 105
Αξία	126
Άξονας συμμετρίας	146
Αξονική συμμετρία	146, 170
Απλή μέθοδος των τριών	92, 94
Απλοποίηση κλάσματος	50
Αριθμητική παράσταση	24
Αριθμητική παράσταση με κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς	56
Αριθμητικό μοτίβο	130, 133
Αριθμομηχανή	28
Αρχική τιμή ποσού	100, 102, 105
Ατελής διαίρεση	22, 57
Αφαίρεση αριθμών	18, 57
Αφαίρεση κλασμάτων	54
Βάση (δυνάμεις)	42
Βάση παραλληλογράμμου	150
Γινόμενο πρώτων παραγόντων	38, 57
Γράφημα	109, 133
Γράφημα γραμμής	114, 133
Γωνίες: Οξεία, ορθή και αμβλεία γωνία	140
Δεκαδικοί αριθμοί	12, 57
Διαγώνιος	138, 170
Διαίρεση κλασμάτων	56
Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών	22, 57
Διαιρέτης ενός αριθμού	32, 57
Διάταξη αριθμών	16
Διαφορά γωνιών	140
Δυνάμεις	42
Εικονόγραμμα	110, 133
Εκθέτης	42
Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)	40, 57
Εμβαδό κυκλικού δίσκου	156, 170
Εμβαδό παραλληλογράμμου	150, 170
Εμβαδό επιφάνειας κυλίνδρου	162
Εμβαδό τραπεζίου	154, 170
Εμβαδό τριγώνου	152, 170

Εξίσωση	64, 66, 68, 70, 71
Επίλυση προβλήματος	26
Επιτόκιο	126, 133
ΕΥΡΩ, λεπτά	126, 133
Ιδιότητες της πρόσθεσης: Αντιμεταθετική και προσεταιριστική	18, 57
Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού: Αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική	20, 57
Ισοδύναμα κλάσματα	50, 57
Ισοτιμία	126, 133
Κανονικά πολύγωνα	138
Κατανομή συχνοτήτων	112, 133
Κατασκευή γωνιών	142
Κλάσμα	46, 57
Κλίμακα	144, 170
Κορυφή	160, 170
Κριτήρια διαιρετότητας	34
Κύβος: Έδρες, βάσεις, παράπλευρη επιφάνεια και ολική επιφάνεια	158, 170
Κυκλικό διάγραμμα	114, 133
Κύλινδρος	162, 170
Λίτρο	164, 170
Λόγος	76
Λύση της εξίσωσης	64, 66, 68, 70, 71
Μεγέθυνση σχημάτων	144, 169
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)	32, 57
Μεικτός αριθμός	46
Μέσος όρος, Μέση τιμή	116, 133
Μεταβλητά ποσά	82
Μεταβλητή	62, 71
Μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα	52
Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό	48
Μετρήσεις βάρους, γραμμάριο, κιλό, χιλιόγραμμο	122, 133
Μετρήσεις μήκους, μέτρο	120, 133
Μετρήσεις χρόνου, χρονική διάρκεια, ώρα, λεπτό, δευτερόλεπτο	124, 133
Μέτρηση γωνιών	140, 170
Μέτρηση επιφάνειας - εμβαδό	148, 170
Μοτίβο	128, 133
Νομισματική μονάδα	126, 133
Όγκος	164, 170
Όγκος κύβου	166, 170
Όγκος κυλίνδρου	168, 170
Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου	166, 170
Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: Έδρες, βάσεις, παράπλευρη και ολική επιφάνεια	158, 170
Όρος ακολουθίας	130
π (πι)	156
Πίνακας κατανομής συχνοτήτων	112, 133
Πίνακας ποσών και τιμών	90
Πολλαπλάσια,	40, 57
Πολλαπλασιασμός κλασμάτων	56
Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών αριθμών	20, 57
Πολύγωνα,	138, 170
Ποσά	82

Ποσοστά	96, 98, 105
Ποσοστό %	104, 105
Πρόσθεση αριθμών	18, 57
Πρόσθεση κλασμάτων	54
Πρώτοι αριθμοί	36, 57
Ραβδόγραμμα	110, 133
Σμίκρυνση σχημάτων	144, 170
Σταθερά ποσά	82
Σταυρωτά γινόμενα	80
Στρογγυλοποίηση	30
Σύγκριση αριθμών	16
Σύγκριση κλασμάτων	52
Συμμετρία	146, 170
Σύνθετο μοτίβο	132, 133
Σύνθετοι αριθμοί	36, 57
Σχήματα, γεωμετρικά σχήματα,	138, 170
Τέλεια διαίρεση	22, 57
Τελική τιμή ποσού	100, 102, 105
Τετραγωνικό μέτρο	148
Τόκος	126,133
Υπολογιστής τσέπης	28, 57
Ύψος παραλληλογράμμου	150
Φυσικοί αριθμοί	10, 57
Χωρητικότητα	164, 170

Πίνακας Φωτογραφικών απεικονίσεων

α/α	Θέμα	Σελίδα	Φωτογράφος
1.	Σύνθεση 1ης ενότητας	6	Π. Κλιάπης
2.	Υπερατού	13	ΜΙΚΑ Α.Ε.
3.	Σύνθεση 2ης ενότητας	58	Π. Κλιάπης
4.	Σύνθεση 1ης ενότητας	72	Π. Κλιάπης
5.	Δάσος	93	Π. Κλιάπης
6.	Σύνθεση 3ης ενότητας	106	Π. Κλιάπης
7.	Αίγαγρος	113	Π. Κλιάπης
8.	Σύνθεση 4ης ενότητας	116	Π. Κλιάπης
9.	The Great Wall of China at MuTianYu	117	Joan Ho
10.	Ακρόπολη	119	Νίνα Πουγιουκλίδη
11.	Big Ben	121	www.bigfoto.com
12.	Σύνθεση 5ης ενότητας	134	Π. Κλιάπης
13.	Ιστός αράχνης	135	Π. Κλιάπης
14.	Πύργος της Πίζας	137	Ο. Κασσώτη
15.	Βεργίνα	154	Ο. Κασσώτη

Με απόφαση της Ελληνικής Κυβέρνησης τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν βιβλιόσημο προς απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δε φέρει βιβλιόσημο, θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α΄).

ΒΙΒΛΙΟΣΗΜΟ

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.